CALCUL FRACTIONNAIRE, VARIÉTÉS FRACTALES ET RELATIVITÉ D'ÉCHELLE

F. Ben Adda*, J. Cresson**

* Institut de Mathématiques de Jussieu,
Laboratoire d'analyse numérique,
4 place jussieu,
75252 Paris cedex 05, France

** Equipe de Mathématiques de Besançon,
Université de Franche-Comté,
16 route de Gray,
25030 Besançon cedex, France

Résumé

Cet article est constitué de 3 chapitres. Le premier pose les fondements théoriques de la dérivation fractionnaire locale introduite par Kolvankar et Gangal. On démontre comment cet outil permet une étude fine de la structure locale des fonctions non différentiables. Notamment, on établit un lien clair entre ordre de différentiabilité fractionnaire, dimension fractale de graphe et exposant de hölder. On démontre aussi des analogues fractionnaires de théorèmes classiques de l'analyse (extremum, Rolle), notamment un développement de Taylor généralisé. On définit une nouvelle dérivation d'ordre réel qui exploite à la fois les informations locales de la dérivation d'ordre réel à gauche et à droite. On introduit la notion d'intégrale d'ordre réel indéfinie et les équations différentielles fractionnaires. Le chapitre 2 aborde l'étude des courbes non rectifiables en général. On répond à un problème de L. Nottale sur le rapport existant entre la divergence d'échelle de la longueur d'une courbe et sa rectifiabilité. Dans le cas des graphes de fonctions, on démontre que si la divergence est de type polynomiale en l'échelle, alors la courbe est non rectifiable. Les divergences plus faibles (logarithmique) ne donnent aucune contrainte sur la régularité de la courbe. On explicite le lien entre dimension fractale, divergence d'échelle et différentiabilité fractionnaire. Le chapitre 3 donne une première notion de variété fractale. On démontre qu'il y a une infinité de géodésiques (généralisées) sur ces objets.

Mots-clés: dérivation fractale locale, non rectifiable, fractale, courbe, dimension fractale, relativité d'échelle.

CALCUL FRACTIONNAIRE, VARIÉTÉS FRACTALES ET RELATIVITÉ D'ÉCHELLE

F. Ben Adda*, J. Cresson**

* Institut de Mathématiques de Jussieu,
Laboratoire d'analyse numérique,
4 place jussieu,
75252 Paris cedex 05, France

** Equipe de Mathématiques de Besançon,
Université de Franche-Comté,
16 route de Gray,
25030 Besançon cedex, France

TABLE DES MATIÈRES

2. Courbes non rectifiables et divergence d'échelle

INTRODUCTION

1. Les travaux de Nottale en relativité d'échelle. Le domaine des atomes, de leurs noyaux et des particules élémentaires n'a pu être décrit que dans le cadre de la *mécanique quantique* (théorie de nature axiomatique). Les postulats, les outils, les modes de raisonnements, ne semblent pas découler de principes physiques généraux.

Nottale suggère qu'il existe bien un principe fondamental sur lequel fonder la mécanique quantique : le *principe de relativité* appliqué aussi bien aux coordonnées de positions et de temps, qu'à celles de résolution. La théorie quantique n'est pas remplacée, mais découle de la structure *géométrique* de l'espace temps, comme en physique relativiste.

L'idée, proposée simultanément par G. Ord et L. Nottale est de remplacer l'*espace-temps* de la relativité, décrit par la géométrie Riemannienne, par un espace-temps dont la structure serait *non régulière*, pour lequel ils utilisent le terme de *fractal*. Il n'existe pas de définition mathématique d'un objet fractal.

Ces objets possèdent une propriété commune: l'*analyse* sur ces variétés dépend de la donnée d'une *résolution*. Cette propriété conduit naturellement à la *relativité d'échelle* développée par L. Nottale. La généralisation du principe de relativité consiste , dans un premier temps, à reconnaitre que les quantités physiques dépendent sur ces objets de la *résolution* (en temps et en espace). L'espace temps est donc un espace de la forme (x, t, ϵ) où $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $\epsilon \in \mathbb{R}^{n+1}$, où ϵ désigne les différentes résolutions en espace et en temps. On peut alors énoncer le principe de relativité d'échelle sous la forme : les lois de la physique sont covariantes par rapport aux transformations de référentiels (x, t, ϵ). Cela implique certaines lois de transformation des résolutions.

Ceci étant posé, on en vient à la description de la physique dans un espace-temps fractal. On note dorénavant V l'espace-temps fractal. L. Nottale montre que la structure fractale de V impose l'existence d'une *infinité de géodésiques* reliant deux points quelconques de V. Ce résultat demande de nombreuses précisions, au moins au niveau de la définition mathématique rigoureuse du terme *géodésique* employé ici.

2. La dérivée covariante d'échelle. L'observation précédente permet la construction d'une dérivée appelée *dérivée covariante d'échelle*. Elle repose sur des considérations générales de dominance ou non du comportement fractal de chacune des géodésiques. Notamment, il existe une résolution de *transition*, notée λ, au dessus de laquelle le comportement moyen est prépondérant, alors qu'en dessous, c'est l'aspect fractal qui domine.

2.1. Le principe de sa construction est le suivant:

a. Soit $F(t;\epsilon)$ une application de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on suppose que la variation de $F(t;\epsilon)$ comme fonction de ϵ suit la *loi d'échelle*

$$\frac{dF}{d\tau}=a+bF,$$

où $\tau=ln(\epsilon)$ et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a

$$F(t;\epsilon)=\frac{a}{b}\left(\frac{\epsilon}{\lambda}-1\right)+F(t;\lambda)\left(\frac{\epsilon}{\lambda}\right)^b.$$

On remarque que pour $\epsilon>>\lambda$, $F(t;\epsilon)$ devient indépendant de l'échelle. Au contraire, si $\epsilon<<\lambda$, on obtient une quantité fortement dépendante de la résolution. Dans le premier cas, c'est le comportement moyen qui domine, alors que dans le second, il est nécessaire de prendre en compte le comportement fractal. Cette observation permet de lisser toute fonction de la forme $F(t;\epsilon)$ par un bon choix de résolution δ. On note $\bar{F}_\delta(t)$ la fonction ainsi obtenue.

b. On se donne donc une géodésique $f(t)$ fractale. Il est possible de définir pour $\epsilon>0$ donné, en chaque point t deux quantités (assimilées à des vitesses à droite et à gauche)

$$V^+(t;\epsilon)=\frac{f(t+\epsilon)-f(t)}{\epsilon},\quad V^-(t;\epsilon)=\frac{f(t)-f(t-\epsilon)}{\epsilon}.$$

Par la remarque précédente, on peut choisir une résolution δ telle que $\bar{V}_\delta^+(t)$ et $\bar{V}_\delta^-(t)$ soient deux fonctions différentiables.

c. Nous avons donc pour tout t, et toute géodésique γ_i, $i\in\mathbb{N}$, deux fonctions $\bar{V}_{\delta,i}^+(t)$ et $\bar{V}_{\delta,i}^-(t)$. En tout point t, on associe alors la moyenne des $\bar{V}_{\delta,i}^\sigma(t)$ prise sur l'ensemble des géodésiques, notée $V^\sigma(t)$, $\sigma=\pm$. On obtient donc une "vitesse" composée de deux quantitées V^+ et V^-.

Nottale définie alors la quantité

$$v=\frac{V^++V^-}{2}+i\frac{V^+-V^-}{2},\quad i^2=-1.$$

Lorsque la géodésique est différentiable, on obtient la vitesse classique. En revenant à la courbe initiale, on a

$$V = v + R(\epsilon),$$

où $R(\epsilon)$ est la variation de la courbe par rapport à la moyenne. On définit donc l'opérateur d^σ par

$$d^\sigma f = V^\sigma, \quad \sigma = \pm,$$

et l'opérateur d par

$$d = \frac{d^+ + d^-}{2} + i\frac{d^+ - d^-}{2}.$$

Nous renvoyons aux différents articles de Nottale pour plus de détails.

3. Plan de l'article. Dans cet article, on développe les outils mathématiques permettant d'étudier les objets non différentiables (dérivée fractionnaire locale, représentation moyenne et résolution , ...). On donne un sens mathématique précis aux points a) et b) du §.2. On justifie ainsi rigoureusement la forme de la dérivée covariante d'échelle de Nottale pour une large classe de fonctions irrégulières, à savoir celles de classe $\mathcal{C}^\alpha$. On donne des expressions quantitatives de v et $R(\epsilon)$ dépendant des invariants du graphe de f. On donne une première définition de variété fractale. On démontre ainsi qu'il existe une infinité de géodésiques (correctement généralisées) sur ces objets, justifiant ainsi les fondements du raisonnement de Nottale.

3.1. Dans le chapitre 1, on précise le type de fonctions irrégulières que nous considérons et les outils d'analyse de celles ci. On développe la notion de dérivée *fractionnaire locale*, introduite par Kolvangar et Gangal. On démontre que cet outil, correctement généralisé, permet une étude fine de la structure locale des fonctions non différentiables. On obtient ainsi en chaque point x, deux quantités, $d^\alpha_\sigma f(x)$, $\sigma = \pm$. On définit alors la toute nouvelle notion de α-dérivabilité contenant toute l'information locale d'une courbe non différentiable en un point, à savoir

$$f^{(\alpha)}(x) = \frac{d^\alpha_+ f(x) + d^\alpha_- f(x)}{2} + i\frac{d^\alpha_+ f(x) - d^\alpha_- f(x)}{2}, \quad i^2 = -1.$$

La non différentiabilité de f se traduit par l'apparition d'une composante complexe dans la dérivée α-ième. Une fonction sera de classe C^α en un point x si la α-dérivée existe en ce point. Dans la suite de ce texte, nous nous limitons aux fonctions de classe C^α, c'est à dire telles que la α-dérivée existe en tout point. Le cas des fonctions de classe $C^{<\alpha_0}$, telles qu'il existe une α-dérivée avec $\alpha \le \alpha_0$ en tout point, sera étudié dans un autre papier.

Pour les fonctions de classe C^α, on donne les différentes relations existant entre les *invariants* de ces courbes, à savoir l'exposant de α-dérivabilité, la dimension fractale de la courbe et les exposants de Hölder.

On étudie ensuite le rapport existant entre une fonction de classe C^α et sa ϵ-moyennisation notée $\bar{f}_\epsilon$. La fonction $\bar{f}_\epsilon$ est toujours dérivable, et on peut montrer que pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\bar{f}'_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^{1-\alpha}} Re(f^{(\alpha)}(x)) + O(\epsilon^\alpha).$$

On définit ensuite la notion d'intégrale indéfinie et on en donne les propriétés. Il est délicat de donner l'expression explicite de l'opérateur d'intégration. On discute quelques pistes.

On discute enfin les équations différentielles fractionnaires (EDF). On donne la forme des solutions dans le cas linéaire. On démontre que s'il existe une solution à une EDF linéaire alors elle en a une infinité. Ce résultat nous permet de démontrer au chapitre 3, l'existence d'une infinité de "géodésiques" sur une variété fractale.

3.2. Le chapitre 2 aborde la relation existant entre une courbe Γ non régulière et son représentant Γ_ϵ obtenu via une résolution donnée ϵ. Les représentants sont obtenus par la méthode des compas ou le procédé de ϵ-moyennisation du chapitre 1. Cette étude nous permet de répondre complètement à un problème posé par Nottale [N]: soit Γ le graphe d'une fonction continue f, définie sur un intervalle $[a, b]$, on sait, par le théorème de Lebesgue qu'elle est différentiable presque partout. Lorsque la longueur de Γ est infinie, peut-on savoir si la fonction f est non différentiable presque partout? La réponse dépend de la divergence de la longueur de Γ_ϵ en fonction de ϵ. On démontre que si $L(\Gamma_\epsilon) = O\left(\frac{1}{\epsilon^\delta}\right)$, avec $\delta > 0$, alors il existe un arc non réduit à un point tel que la courbe sur cet arc soit non rectfiable presque partout. Il est possible via les résultats du chapitre 1 sur les invariants des courbes non régulières de montrer que $\delta = \frac{1}{2-\Delta} - 1$, où Δ est la dimension fractale de Γ. Au moyen d'exemples explicites, on montre que les divergences plus faibles en ϵ (par exemple logarithmique) ne permettent pas de distinguer une courbe rectifiable d'une courbe fractale.

On montre aussi que dans le cas des graphes de fonctions de classe C^α, la divergence minimale est polynomiale avec $\delta = \frac{1}{\alpha} - 1$.

On introduit ensuite la notion d'applications de type R, qui sont les fonctions $f(t;\epsilon)$ presque partout différentiables en t pour $\epsilon > 0$ et asymptotiquement de classe C^α. Un exemple simple de telle fonction est donné par la ϵ-moyennisation $\bar{f}_\epsilon$ d'une fonction f de classe C^α. On définit ensuite les notions de résolution en temps δ et espace ϵ. On démontre que pour une fonction de classe C^α on a

$$\epsilon \sim \delta^\alpha.$$

Les divergences d'échelle des graphes conduisent naturellement à la notion de *loi d'échelle*. Une loi d'échelle est la donnée d'une équation différentielle de la forme

$$\frac{dL}{d\tau} = E(L),$$

où $\tau = \log \epsilon$ et L est une longueur. Les résultats précédents permettent de montrer que les lois d'échelle des graphes de fonctions de classe C^α sont quadratiques, c'est à dire $E(L) = a + bL$, où $b = \dfrac{-\alpha}{1-\alpha}$.

On définit ensuite la notion d'*échelle*, et les lois de transformation de ces échelles suivant la loi d'échelle choisie. On montre que dans le cas d'une loi d'échelle quadratique, la loi de transformation d'échelle est engendrée par le groupe de Galilée.

On introduit une notion de "*bonne*" représentation δ-moyenne d'une fonction de classe C^α : si la résolution spatiale $\epsilon(\delta)$ associée à la résolution temporelle $\delta > 0$ vérifie

$$\frac{\epsilon(\delta)}{\delta} = O(1),$$

alors la représentation δ-moyenne est dite *bonne*. Ce critère provient de la représentation δ-moyenne des fonctions différentiables.

On montre alors que si $F \in C^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$, alors il existe une résolution *minimale* $\delta(\alpha)$ telle que : si $\delta \geq \delta(\alpha)$ la représentation δ-moyenne de f est bonne, et mauvaise sinon.

L'existence de la résolution minimale $\delta(\alpha)$ s'interprète aussi sur la loi d'échelle quadratique vérifiée par les représentations δ-moyennes des fonctions de classe C^α, $0 < \alpha < 1$.

Ces résultats éclairent le point a) du raisonnement de Nottale.

3.3. Le chapitre 3 donne une définition de variété fractale (ou fractionnaire). Contrairement à l'idée communément admise, ces variétés sont différentiables (elles le sont toujours en dimension ≤ 3). C'est la capacité de l'espace tangent à donner une information sur la structure locale de la variété qui donne ou non, le caractère fractal de la variété. A l'aide de la notion de α-différentiabilité du chapitre 1, on définit un espace-tangent généralisé prenant en compte l'aspect fractal de la variété.

Après avoir introduit une notion de connexion linéaire sur une variété fractale (et donc de dérivée covariante), on donne une définition formelle de géodésique sur ces objets. On démontre alors qu'il existe toujours une infinité de géodésiques reliant deux points quelconques d'une variété fractale. Ce résultat justifie les fondements du raisonnement de Nottale sur la relativité d'échelle.

I. Sur la α-dérivabilité,

$\alpha \in]\mathbf{0}, \mathbf{1}]$.

Dans ce chapitre, nous précisons les fondements de la α-dérivée. Cette nouvelle dérivation permet une étude locale complète d'une fonction non dérivable. Elle utilise la notion de dérivation fractionnaire locale introduite par Kolvankar et Gangal [KG].

On commence par rappeler la notion de dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'une fonction continue. L'un des points faibles de cette dérivation est sa non-localité qui rend difficile son utilisation dans l'étude locale des courbes irrégulières. De plus, du fait de la multiplicité de ses valeurs en fonction du paramètre non local, elle ne peut pas servir d'invariant de classification des fonctions non différentiables.

La dérivation fractionnaire locale (droite ou gauche) résoud ce problème en faisant tendre le paramètre local de Riemann-Liouville vers le point de dérivation y , et en considérant non plus la fonction $f(x)$ mais $f(x) - f(y)$. Cette simple modification a d'importantes implications. Tout d'abord, et contrairement à Riemann-Liouville, la dérivée d'une constante est nulle. Ceci permet de généraliser aux fonctions non différentiables des théorèmes classiques de l'analyse (extremum, Rolle). De plus, l'interprétation géométrique de cette dérivée est claire : elle donne le comportement höldérien local de la fonction. En fait, l'ordre critique de dérivation fractionnaire est égal à l'exposant de hölder.

On démontre alors, en suivant [KG], une formule de Taylor généralisée. Celle-ci nous permettra au chapitre 2 d'estimer la divergence d'échelle minimale des graphes de fonctions non différentiables.

Il n'est pas indispensable de connaitre la littérature classique du sujet pour aborder ce chapitre. Toutes les définitions sont rappelées et les démonstrations des résultats sont développées.

Il est nécessaire d'avoir l'information sur la dérivée fractionnaire locale droite et gauche pour reconstruire localement le comportement de la fonction. On introduit donc une nouvelle dérivée, appelée α-dérivée, regroupant toute l'information utile à cette analyse locale. Le nombre α-dérivé d'une fonction est un complexe. Lorsque la fonction est dérivable la partie imaginaire disparait et on retrouve la dérivée usuelle.

On introduit l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\alpha$ (fonctions possèdant une α-dérivée en tout point) et on étudie ses propriétés.

Le dernier paragraphe traite des équations différentielles fractionnaires associées à la α-dérivation.

1. DÉRIVÉE FRACTIONNAIRE LOCALE

1.1. Différentiabilité au sens de Riemann-Liouville. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Pour tout $x \in [a,b]$, on définit l'intégrale de Riemann-Liouville à gauche et à droite du point x par

$$I^\alpha_{a,-}(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \tag{1}$$

et

$$I^\alpha_{b,+}(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \tag{2}$$

respectivement. La dérivée de Riemann-Liouville à gauche et à droite de x est donnée par

$$D^\alpha_{a,-}(f)(x) = \frac{dI^{1-\alpha}_{a,-}(f)(x)}{dx}. \tag{3}$$

et

$$D^\alpha_{b,+}(f)(x) = \frac{dI^{1-\alpha}_{b,+}(f)(x)}{dx}. \tag{4}$$

On note que

$$I^\alpha_{b,+}f(x) = I^\alpha_{a,-}(f(b-t))(b-x). \tag{5}$$

On peut donc se restreindre à ne considérer que la dérivée (ou l'intégrale) à gauche.

Définition 1.1 *On dit que la fonction f admet une dérivée d'ordre $0 < \alpha < 1$ (au sens de Riemann-Liouville) en $x \in [a,b]$ par valeurs inférieures (resp. par valeurs supérieures) si $D^\alpha_{a,-}(f)(x)$ existe (resp. si $D^\alpha_{b,+}(f)(x)$ existe).*

Evidemment, suivant le choix de la borne a (resp. de la borne b), on obtient une infinité de valeurs possibles de la dérivée de Riemann-Liouville en un point par valeurs inférieures (resp. par valeurs supérieures). Cette multiplicité des valeurs rend difficile l'analyse locale des fonctions non régulières.

De plus, la dérivée d'une constante $C \in \mathbb{R}$ n'est pas nulle, on a

$$D^{\alpha}_{a,-}(C)(x) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{(x-a)^{\alpha}}. \tag{6}$$

Ces deux points ne permettent pas une interprétation géométrique simple de la donnée de la dérivée de Riemann-Liouville en un point [B1]. Autrement dit, il n'y a pas de rapport évident entre la géométrie locale de la courbe et sa dérivée.

Propriétés de la dérivée de Riemann Liouville. On rappelle quelques propriétés utiles dans la suite de ce travail. On renvoie au livre de Podlubny [P] pour plus de détails.

On a

$$\frac{d^n}{dt^n}(D^p_{a,t} f(t)) = D^{n+p}_{a,t} f(t). \tag{7}$$

Par contre, on a

$$D^p_{a,t}(\frac{d^n f(t)}{dt^n}) = D^{p+n}_{a,t} f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-p-n}}{\Gamma(1+j-p-n)}. \tag{8}$$

La dérivée de Riemann-Liouville commute donc avec la dérivée usuelle si et seulement si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, \dots, n-1$.

On a aussi les formules de composition suivantes : soit $m-1 \leq p < m$ et $n-1 \leq q < n$, alors

$$D^p_{a,t}(D^q_{a,t} f(t)) = D^{p+q}_{a,t} f(t) - \sum_{j=1}^{n} [D^{q-j}_{a,t} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-j}}{\Gamma(1-p-j)}, \tag{9}$$

$$D^q_{a,t}(D^p_{a,t} f(t)) = D^{p+q}_{a,t} [D^{p-j}_{a,t} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-q-j}}{\Gamma(1-q-j)}. \tag{10}$$

On voit sans peine qu'en général les dérivées de Riemann-Liouville ne commutent pas entre elles. Elles commutent si et seulement si $f^{(j)}(a) = 0$, $j = 0, \dots, r-1$ avec $r = \max(n, m)$.

On renvoie aux livres ([D],[OS],[R]) pour plus de détails.

1.2. Dérivée fractionnaire locale. Dans le but de palier aux difficultés d'interprétation de la dérivée de Riemann-Liouville, Kolvankar et Gangal [KG] on introduit une notion de dérivée fractionnaire locale.

Définition 1.2. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, on appelle dérivée fractionnaire locale de f à droite (resp. à gauche) du point $y \in [a,b]$ la quantité*

$$d^{\alpha}_{\sigma} f(y) = \lim_{x \to y^{\sigma}} D^{\alpha}_{y,-\sigma} \left[\sigma(f - f(y)) \right](x), \tag{11}$$

pour $\sigma = \pm$ respectivement.

On a les propriétés évidentes suivantes :

(i) (recollement) si f est différentiable au point x, on a

$$\lim_{\alpha \to 1} d^{\alpha}_{\sigma} f(x) = f'(x),\ \sigma = \pm.$$

(ii) On a $d^{\alpha}_{\pm}(C) = 0$ pour tout $C \in \mathbb{R}$ et $\sigma = \pm$.

Théorème 1.1. *La dérivée fractionnaire locale de f (à droite ou à gauche), $d^{\alpha}_{\sigma} f(x)$ est égale à*

$$d^{\alpha}_{\sigma} f(x) = \Gamma(1+\alpha) \lim_{y \to x^{\sigma}} \frac{\sigma\Big(f(x) - f(y)\Big)}{\left[\sigma(x-y)\right]^{\alpha}}. \tag{12}$$

On retrouve ainsi la notion de α-vitesse introduite par Cherby ([C1],[C2]) dans son étude des courbes non différentiables. La démonstration repose sur la généralisation du théorème de Taylor. On note

$$F_{\sigma}(y, \sigma(x-y), \alpha) = D^{\alpha}_{y,-\sigma} \Big[\sigma\Big(f - f(y)\Big)\Big](x). \tag{13}$$

Théorème 1.2. *Soit f une fonction continue, telle que $d^{\alpha}_{\sigma} f(y)$ existe pour $0 < \alpha$, $\sigma = \pm$, alors*

$$f(x) = f(y) + \sigma \frac{d^{\alpha}_{\sigma} f(y)}{\Gamma(1+\alpha)} \Big[\sigma\Big(x-y\Big)\Big]^{\alpha} + R_{\sigma}(x,y), \tag{14}$$

avec

$$R_{\sigma}(x,y) = \sigma \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^{x-y} \frac{dF_{\sigma}(y, \sigma t; \alpha)}{dt} \Big(\sigma(x-y-t\Big)^{\alpha} dt, \tag{15}$$

et

$$\lim_{x \to y^{\sigma}} \frac{R_{\sigma}(x,y)}{\Big(\sigma(x-y)\Big)^{\alpha}} = 0. \tag{16}$$

Démonstration. - On effectue la démonstration dans le cas $\sigma = +$. La démarche est analogue pour $\sigma = -$. Puisqu'aucune confusion n'est possible, nous omettons l'indice + dans les formules suivantes. On a

$$\begin{aligned}
f(x) - f(y) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-y} \frac{F(y,t,\alpha)}{(x-y-t)^{1-\alpha}} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[F(y,t,\alpha) \int (x-y-t)^{\alpha-1} dt \right]_0^{x-y} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-y} \frac{dF(y,t,\alpha)}{dt} \frac{(x-y-t)^{\alpha}}{\alpha} dt.
\end{aligned} \tag{17}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
f(x) - f(y) &= \frac{d^{\alpha} f(y)}{\Gamma(\alpha+1)} (x-y)^{\alpha} \\
&\quad \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{x-y} \frac{dF(y,t,\alpha)}{dt} (x-y-t)^{\alpha} dt.
\end{aligned} \tag{18}$$

On a donc $f(x) = f(y) + \dfrac{d^{\alpha} f(y)}{\Gamma(\alpha+1)} (x-y)^{\alpha} + R(x,y)$. De plus, on a

$$\frac{R(x,y)}{(x-y)^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{x-y} \frac{dF(y,t;\alpha)}{dt} \left(\frac{x-y-t}{x-y} \right)^{\alpha} dt. \tag{19}$$

Comme $\left| \dfrac{x-y-t}{x-y} \right| < 1$, on a

$$\left| \frac{R(x,y)}{(x-y)^{\alpha}} \right| < \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\left| F(y, x-y;\alpha) \right| - \left| d^{\alpha} f(y) \right| \right). \tag{20}$$

Comme $\lim_{x \to y} F(y, x-y;\alpha) = d^{\alpha} f(y)$, on en déduit $\lim_{x \to y} \left| \dfrac{R(x,y)}{(x-y)^{\alpha}} \right| = 0$, ce qui termine la démonstration du théorème. □

Le théorème 1.1 en découle immédiatement.

On a donc la notion suivante de α-dérivabilité locale :

Définition 1.3. *Soit $f(t)$ une fonction définie sur $[a,b]$, continue. On dit que f est α-dérivable localement au point $x \in [a,b]$ si $d_{\sigma}^{\alpha} f(x)$ existe pour $\sigma = \pm$.*

1.2.1. Dérivée fractionnaire locale d'ordre $\alpha + n$, $(0 < \alpha < 1,\ n \in \mathbb{N})$.

On a

Définition 1.4. *Soit $f \in C^n$, la dérivée d'ordre $\alpha + n$ de f est la quantité*

$$d_{\sigma}^{\alpha+n} f(x) = d_{\sigma}^{\alpha} f^{(n)}(x), \quad \sigma = \pm. \tag{21}$$

On peut donner une définition légèrement différente (et plus générale) en posant

$$d^{\alpha+n}f(x) = \lim_{y\to x} D^{\alpha}_{x,\sigma}[\sigma(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k](x). \tag{22}$$

Si f est de classe C^n, alors on retombe sur la définition précédente.

Remarque. Comme le remarquent Kolvankar et Gangal [KG], cette définition a l'avantage de ne pas supposer qu'il existe une dérivée d'ordre n en tout point.

1.2.2. Développement de Taylor et singularités masquées.

Dans ce paragraphe, on considère des fonctions de classe C^k, dont la dérivée $k+1$-ème n'existe pas. On note

$$\bar{C}^k = \{\ f, f \in C^k et\ f^{(k)} \text{ non dérivable } \}. \tag{23}$$

Nous avons la généralisation suivante du théorème 1.2 :

Théorème 1.3. *Soit $f \in \bar{C}^k$, telle que $d^{\alpha+k}f$ existe au point y, alors*

$$f(x) = f(y) + \sum_{i=1}^{k} \frac{f^{(i)}(y)}{\Gamma(i+1)}(x-y)^i + \sigma\frac{d^{\alpha}_{\sigma} f^{(k+1)}(y)}{\Gamma(k+\alpha+1)}[\sigma(x-y)]^{k+\alpha} + R_{\sigma}(x,y), \tag{24}$$

avec

$$\lim_{x\to y^{\sigma}} \frac{R_{\sigma}(x,y)}{(\sigma(x-y))^{k+\alpha}} = 0. \tag{25}$$

Démonstration -On effectue la démonstration dans le cas $\sigma = +$. La démarche est analogue pour $\sigma = -$. Comme $f \in \bar{C}^k$, le développement de Taylor avec reste intégral à l'ordre $k-1$ donne,

$$f(x) = f(y) + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{f^{(i)}(y)}{\Gamma(i+1)}(x-y)^i + \int_y^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)dt. \tag{26}$$

Comme $f^{(k)} \in \mathcal{C}^{\alpha}$ par hypothèse, alors pour tout $t \in [y,x]$ on a

$$f^{(k)}(t) = f^{(k)}(y) + \frac{(t-y)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} d^{k+\alpha}f(y) + o((t-y)^{\alpha}). \tag{27}$$

Une intégration par parties répétée $k-1$ fois donne alors

$$f(x) = f(y) + \sum_{i=1}^{k} \frac{f^{(i)}(y)}{\Gamma(i+1)}(x-y)^i + \frac{d^{\alpha} f^{(k+1)}(y)}{\Gamma(k+\alpha+1)}(x-y)^{k+\alpha} + o((x-y)^{k+\alpha}), \tag{28}$$

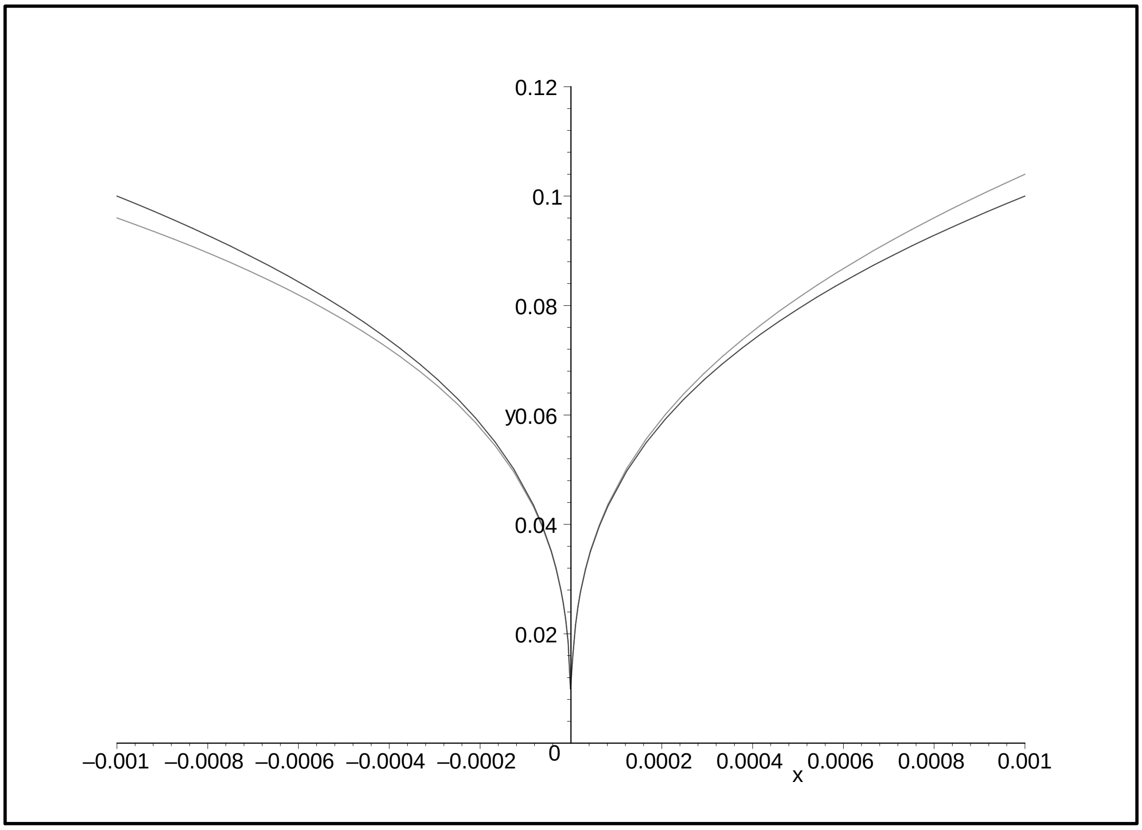

Figure 1: Approximation du développement de Taylor pour la fonction $f(x) =\mid x \mid^{\alpha} +4x$.

d'où le résultat. □

1.2.3. Un autre type de développement. La dérivée de Riemann-Liouville d'ordre $n+\alpha$, $n \in \mathbb{N}$ et $0 < \alpha < 1$ s'écrit

$$D_{a,-}^{\alpha+n}(f)(x) = \frac{d^{n+1} I_{a,-}^{n+1-\alpha}(f)(x)}{dx^{n+1}}, \tag{29}$$

et

$$D_{b,+}^{\alpha+n}(f)(x) = \frac{d^{n+1} I_{b,+}^{n+1-\alpha}(f)(x)}{dx^{n+1}}. \tag{30}$$

On note

$$\mathcal{D}_{\sigma}^{\alpha+n}(f)(y) = \lim_{x \to y^{\sigma}} D_{y,-\sigma}^{\alpha+n}\left[\sigma(f - f(y))\right](x). \tag{31}$$

L'utilisation directe des propriétés de l'additivité de la dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville dans la formule (31) ne donnera pas la formule (21).

Théorème 1.4. *Soit $\alpha \in]0,1[$. Soit f une fonction $(\alpha+k)$-dérivable sur $]a,b[$ pour tout $0 \leq k \leq n$. Soit $x_0 \in]a,b[$. Alors il exite $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$ on a*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \sigma \frac{\left[\sigma(x-x_0)\right]^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)} \mathcal{D}_{\sigma}^{\alpha+k} f(x_0) + R_{n+1,\sigma}(x,y). \tag{32}$$

avec

$$R_{n+1,\sigma}(x,y) = \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha+n+1)} \int_0^{x-x_0} \frac{d^{n+1} F_{\sigma}(x_0, \sigma t, \alpha)}{dt^{n+1}} \Big(\sigma(x-x_0-t)\Big)^{\alpha+n} dt, \tag{33}$$

et

$$\lim_{x \to x_0} \Big| \frac{R_{n+1,\sigma}(x,x_0)}{\Big(\sigma(x-x_0)\Big)^{\alpha+n}} \Big| = 0. \tag{34}$$

Démonstration. Une deuxième intégration par parties de l'égalitée (14) nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) \quad = \quad & \frac{d^{\alpha} f(y)}{\Gamma(\alpha+1)}(x-y)^{\alpha} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\Big((x-y)^{\alpha+1} \frac{dF(y,t,\alpha)}{dt}\big|_{t=0}\Big) \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} \int_0^{x-y} \frac{d^2 F(y,t,\alpha)}{dt^2}(x-y-t)^{\alpha+1} dt. \end{aligned} \tag{35}$$

Pour déterminer la valeur de

$$\frac{dF(y,t,\alpha)}{dt}\big|_{t=0}, \tag{36}$$

déterminons ce que l'on note par $F(y,t,\alpha)$. Comme

$$F(y,x-y,\alpha)=D^{\alpha}_{y,-}\left[\Big(f-f(y)\Big)\right](x), \tag{37}$$

où y est une constante donnée, et si l'on pose $x-y=t$, on obtient

$$F(y,t,\alpha)=D^{\alpha}_{y,-}\left[\Big(f-f(y)\Big)\right](t+y), \tag{38}$$

et alors

$$\frac{dF(y,t,\alpha)}{dt}=\frac{d}{dt}\Big(D^{\alpha}_{y,-}\left[\Big(f-f(y)\Big)\right](t+y)\Big), \tag{39}$$

posons de nouveau $x-y=t$ et $dx=dt$, on obtient

$$\frac{dF(y,t,\alpha)}{dt}|_{t=0}=\frac{d}{dx}\Big(D^{\alpha}_{y,-}\left[\Big(f-f(y)\Big)\right](x)\Big)|_{x=y}. \tag{40}$$

Les propriétés de la dérivation fractale de Riemann-Liouville ([OS],[D]) nous permettent d'écrire

$$\frac{d}{dx}\Big(D^{\alpha}_{y,-}\left[\Big(f-f(y)\Big)\right](x)\Big)|_{x=y}=D^{\alpha+1}_{y,-}\left[\Big(f-f(y)\Big)\right](x)|_{x=y}. \tag{41}$$

D'après la définition de $\mathcal{D}^{\alpha+n}$, on a

$$\frac{dF(y,t,\alpha)}{dt}|_{t=0}=\mathcal{D}^{\alpha+1}f(y), \tag{42}$$

ce qui nous permet d'obtenir

$$\begin{aligned} f(x)-f(y) \;&=\; \frac{d^{\alpha}f(y)}{\Gamma(\alpha+1)}(x-y)^{\alpha}+\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}(x-y)^{\alpha+1}\mathcal{D}^{\alpha+1}f(y)\\ &\quad+\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\int_0^{x-y}\frac{d^2F(y,t,\alpha)}{dt^2}(x-y-t)^{\alpha+1}dt. \end{aligned} \tag{43}$$

Une intégration par parties jusqu'à l'ordre n nous permet d'écrire

$$f(x)-f(y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-y)^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)}\mathcal{D}^{\alpha+k}f(y)+\frac{1}{\Gamma(\alpha+n+1)}\int_0^{x-y}\frac{d^{n+1}F(y,t,\alpha)}{dt^{n+1}}(x-y-t)^{\alpha+n}dt. \tag{44}$$

Si l'on note le n-ième terme par $R_{n+1}(x,y)$, on voit que

$$\Big|\frac{R_{n+1}(x,y)}{(x-y)^{\alpha+n}}\Big|<\frac{1}{\Gamma(\alpha+n+1)}\left(\Big|\frac{d}{dt}F(y,t;\alpha)\Big|_{t=x-y}-\Big|\mathcal{D}^{\alpha+n}f(y)\Big|\right). \tag{45}$$

On en déduit $\lim\limits_{x\to y}\Big|\dfrac{R_{n+1}(x,y)}{(x-y)^{\alpha+n}}\Big|=0$. $\square$

Théorème 1.5 *Soient* $\alpha \in]0,1[$, $\sigma = \pm$, I *un intervalle de* $\mathbb{R}$.
1/ Si f *est une fonction régulière dans* I *alors pour tout* $x \in I$, $d_\sigma^\alpha f(x) = 0$.
2/ La réciproque est fausse.
3/ Si pour tout $x \in I$ *on a* $d_\sigma^\alpha f(x) < \infty$, *alors* f *est non dérivable dans* I.

Démonstration - 1/ f est dérivable dans I, alors on a

$$d_\sigma^\alpha f(x) = \Gamma(1+\alpha) \lim_{y \to x^\sigma} \frac{\sigma\big(f(x) - f(y)\big)}{[\sigma(x-y)]^\alpha}. \tag{46}$$

$$= \Gamma(1+\alpha) \lim_{y \to x^\sigma} \frac{\sigma\big(f(x) - f(y)\big)}{[\sigma(x-y)]} \lim_{y \to x^\sigma} [\sigma(x-y)]^{1-\alpha}. \tag{47}$$

$$= \Gamma(1+\alpha) f'(x) \lim_{y \to x^\sigma} [\sigma(x-y)]^{1-\alpha} = 0. \tag{48}$$

2/ Puisque la régularité de l'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction f, dépend de la nature de la fonction à intégrer alors il suffit de voir que $d_\sigma^\alpha(I_{a,-\sigma}^\alpha f(x))(x) = 0$ pour conclure.

1.3. Non différentiabilité et α-dérivabilité. Soit $f(t)$ une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. On remarque qu'en général on a

$$d_+^\alpha f(x) \neq d_-^\alpha f(x). \tag{49}$$

Dans le cas différentiable, on a (par ii), §.1.2), $d_+^\alpha f(x) = d_-^\alpha f(x)$. Autrement dit, la non différentiabilité d'une application se caractérise par l'existence d'une dérivée fractale locale à droite et à gauche, qui contiennent toutes les deux une information différente sur le comportement local de l'application.

Il est donc nécessaire d'introduire une nouvelle notion de dérivation prenant en compte ces deux informations.

Définition 1.5. *Soit* $f(t)$ *une fonction définie sur* $[a,b]$, *continue, telle que* $d_\sigma^\alpha f(y)$ *existe pour* $\sigma = \pm$ *et* $y \in [a,b]$. *On définit la dérivée* α*-ième de* f *en* y, *et on note* $f^{(\alpha)}(y)$, *la quantité*

$$f^{(\alpha)}(y) = \frac{d_+^\alpha f(y) + d_-^\alpha f(y)}{2} + i \frac{d_+^\alpha f(y) - d_-^\alpha f(y)}{2}, \tag{50}$$

où $i^2 = -1$.

Lorsque $\alpha = 1$ et f non différentiable, mais possède une dérivée à droite et à gauche, on retrouve l'idée de brisure de symétrie du temps discutée par Nottale [N2] comme conséquence de la structure "fractale" de l'espace-temps.

Lorsque f est différentiable, on a $f^{(\alpha)}(y) = f'(y)$. La non différentiabilité se traduit par l'apparition d'une composante complexe dans la dérivée α-ième.

Définition 1.6. *Une fonction f est dite α-dérivable si elle possède une dérivée α-ième en tout point.*

Notations. On note

$$d^\alpha f(x) = \frac{df}{dx^\alpha} + i\frac{df}{d\bar{x}^\alpha}, \tag{51}$$

avec

$$\frac{df}{dx^\alpha} = \frac{d_+^\alpha f(y) + d_-^\alpha f(y)}{2}, \tag{52}$$

et

$$\frac{df}{d\bar{x}^\alpha} = \frac{d_+^\alpha f(y) - d_-^\alpha f(y)}{2}. \tag{53}$$

2. PROPRIÉTÉS DE LA DÉRIVÉE D'ORDRE α.

On commence par donner quelques propriétés de la dérivée fractale locale définie au §.1.2. On en déduit les propriétés générales de la dérivée d'ordre α introduite au §.1.3.

2.1. Propriétés de la dérivée fractale locale. Dans ce qui suit, les démonstrations sont données pour $d_+^\alpha f$. La démarche est analogue pour $d_-^\alpha f$. On omettra donc l'indice + et on notera simplement $d^\alpha f$ pour $d_+^\alpha f$.

Proposition 2.1. *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ α-fois dérivables en x_0, $0 < \alpha < 1$ et λ un réel. Alors $f+g$, λf et fg sont α-fois dérivables en x_0 et on a pour $\sigma = \pm$:*

(i) $d_\sigma^\alpha(f+g)(x_0) = d_\sigma^\alpha f(x_0) + d_\sigma^\alpha g(x_0)$.
(ii) $d_\sigma^\alpha \lambda f(x_0) = \lambda d_\sigma^\alpha f(x_0)$.
(iii) $d_\sigma^\alpha(fg)(x_0) = d_\sigma^\alpha f(x_0).g(x_0) + f(x_0).d_\sigma^\alpha g(x_0)$.

Démonstration. - on a

$$d^\alpha(fg)(x_0) = \Gamma(\alpha)\lim_{x\to x_0}\Big(\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^\alpha}g(x_0) + f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{(x-x_0)^\alpha}\Big). \tag{54}$$

On en déduit la proposition. □

Proposition 2.2. *Soient g une fonction continue sur $[a, b]$ et f une fonction continue sur $[g(a), g(b)]$. Si f admet une dérivée d'ordre $0 < \alpha \leq 1$ en $g(x_0)$, $x_0 \in [a, b]$ et*

i) g admet une dérivée d'ordre $0 < \beta < 1$ en x_0 avec $d_\sigma g(x_0) > 0$, alors

$$d_\sigma^{\alpha\beta}(fog)(x_0) = d_\sigma^\alpha f(g(x_0)).\,(d_\sigma^\beta g(x_0))^\alpha. \tag{55}$$

ii) g de classe C^1, avec $s = \mathrm{signe}(g'(x))$, alors

$$d_\sigma^\alpha(fog)(x_0) = s.d_{s\sigma}^\alpha f(g(x_0)).\,(s.g'(x_0))^\alpha. \tag{56}$$

Démonstration. - Dans le cas i), avec $\sigma = +$, on a d'après la proposition 3.2, il existe un voisinage V_+ à droite de $g(x_0)$ tel que $\forall x \in V_+$, on a $g(x) > g(x_0)$. On a donc

$$d_+^{\alpha\beta}(fog)(x_0) = \Gamma(\alpha) \lim_{x \to x_0^+} \frac{fog(x) - fog(x_0)}{(g(x) - g(x_0))^\alpha} \Big(\frac{g(x) - g(x_0)}{(x - x_0)^\beta}\Big)^\alpha. \tag{57}$$

Une démonstration analogue lorsque $\sigma = -$.

Dans le cas ii), on déduit le résultat en utilisant les propriétés de la dérivée de g et une démarche analogue à i). □

Proposition 2.3. *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que la fonction g n'admet pas de zéro sur $[a, b]$. Si f et g admettent une dérivée d'ordre $0 < \alpha < 1$ sur $[a, b]$ en x_0, alors*

$$d_\sigma^\alpha\Big(\frac{f}{g}\Big)(x_0) = \frac{d_\sigma^\alpha f(x_0).g(x_0) - f(x_0).d_\sigma^\alpha g(x_0)}{g^2(x_0)} \tag{58}$$

Démonstration. - On a

$$d^\alpha\Big(\frac{f}{g}\Big)(x_0) = \Gamma(\alpha) \lim_{x \to x_0} \frac{\big(\frac{f}{g}\big)(x) - \big(\frac{f}{g}\big)(x_0)}{(x - x_0)^\alpha}. \tag{59}$$

d'où

$$d^\alpha\Big(\frac{f}{g}\Big)(x_0) = \Gamma(\alpha) \lim_{x \to x_0} \frac{\Big(\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^\alpha} g(x_0) - f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{(x - x_0)^\alpha}\Big)}{g(x)g(x_0)}. \tag{60}$$

On en déduit la proposition. □

2.2. Propriétés de la dérivée α-ième. Dans la suite nous annonçons les différentes propriétés de la dérivée α-ième (définition 1.4). Les démonstrations sont faciles à obtenir en suivant les démarches du §.2.1.

Proposition 2.4. *Soient f et g deux fonctions définies sur $[a,b]$, continues, telles que $d_\sigma^\alpha f(y)$ et $d_\sigma^\alpha g(y)$ existent pour $\sigma = \pm$, $y \in [a,b]$, $0 < \alpha < 1$ et λ un réel. Alors $f+g$, λf et fg sont α-dérivables en y et on a:*

(i) $(f+g)^{(\alpha)}(y) = f^{(\alpha)}(y) + g^{(\alpha)}(y)$.
(ii) $(\lambda f)^{(\alpha)}(y) = \lambda f^{(\alpha)}(y)$.
(iii) $(fg)^{(\alpha)}(y) = f^{(\alpha)}(y).g(y) + f(y).g^{(\alpha)}(y)$.

Proposition 2.5. *Soient g une fonction continue sur $[a,b]$, f une fonction continue sur $[g(a), g(b)]$. Si $d_\sigma^\alpha f(g(y))$ et et $d_\sigma^\beta g(y)$ existent pour $\sigma = \pm$, $\alpha, \beta \in]0,1]$ et $y \in [a,b]$ alors*

$$(fog)^{(\alpha)}(y) = f^{(\alpha)}(g(y)).\,(g^{(\beta)}(y))^\alpha. \tag{61}$$

Proposition 2.6. *Soient f et g deux fonctions définies sur $[a,b]$, continues, telles que $d_\sigma^\alpha f(y)$ et $d_\sigma^\alpha g(y)$ existent pour $\sigma = \pm$, $y \in [a,b]$, $0 < \alpha < 1$.Si g n'admet pas de zéro sur $[a,b]$ alors*

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{(\alpha)}(y) = \frac{f^{(\alpha)}(y).g(y) - f(y).g^{(\alpha)}(y)}{g^2(y)} \tag{62}$$

2.3. Sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^\alpha$. On définit l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\alpha$ et ses propriétés.

2.3.1. Sur l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\alpha$. On rappelle qu'une fonction est dite α-dérivable si elle est α-dérivable en tout point.

On note $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ α-dérivables.

Remarque. On a $C^1 \subset \mathcal{C}^1$. En effet, lorsque $\alpha = 1$ et $d_+^1 f(x) = d_-^1 f(x)$ pour tout x, alors f est dérivable.

On peut munir $\mathcal{C}^\alpha$ d'une norme définie par

$$\| f \|_\alpha = \sup\{\| f(x) \|, \| d_+^\alpha f(x) \|, \| d_-^\alpha f(x) \|,\ x \in \mathbb{R}\}. \tag{63}$$

On a

Lemme 2.1. *Pour tout $\gamma < \alpha$, on a $\mathcal{C}^\alpha \subset \mathcal{C}^\gamma$.*

Les propriétés de la α-dérivées donnent :

Théorème 2.1. *Si $f \in \mathcal{C}^\alpha$ et $g \in \mathcal{C}^\beta$ avec $\beta > \alpha$, on a*
i) $fg \in \mathcal{C}^\alpha$,
ii) $f + g \in \mathcal{C}^\alpha$,
iii) $f/g \in \mathcal{C}^\alpha$.

Les démonstrations sont simples et laissées au lecteur.

Nous n'avons pas mis de résultat sur la composition de fonctions. Il faut noter que la composition a un comportement compliqué vis à vis de la dérivation. Précisément, on a

Théorème 2.2. *Si $f \in \mathcal{C}^\alpha$ et $g \in \mathcal{C}^\beta$, alors $f \circ g \in \mathcal{C}^{\alpha\beta}$.*

La démonstration découle de la proposition 2.2.

2.3.2. Ordre critique et exposant de Hölder. On note $\mathcal{H}^\gamma$, l'ensemble des fonctions höldériennes d'exposant γ.

Remarque. On a $\mathcal{H}^\gamma \subset \mathcal{C}^\alpha$ pour $\gamma \geq \alpha$.

Une propriété remarquable de la dérivation fractale locale est

Théorème 2.3. *Soit $f(x)$ une fonction continue et höldérienne, on a la propriété suivante : f a un exposant de Hölder α, $0 < \alpha < 1$, en y, si et seulement si $d^q f(y) = 0$ pour tout $q < \alpha$ et $d^q f(y)$ n'existe pas pour $1 > q > \alpha$.*

Démonstration. - si f est höldérienne en y d'exposant α, alors pour x suffisamment proche de y, on a $\mid f(x) - f(y) \mid < c \mid x - y \mid^\alpha$. On en déduit $\mid d^q f(y) \mid \leq \lim_{x \to y} c \mid x - y \mid^{\alpha - q}$. Donc, si $q < \alpha$ on a $d^q f(y) = 0$ et si $q > \alpha$, $d^q f(y)$ n'existe pas.

Soit f une fonction höldérienne d'exposant γ. Si $d^q f(y) = 0$ pour $q < \alpha$, alors on a $\gamma \geq 0$. Si de plus $d^q f(y)$ n'existe pas pour $q > \alpha$, alors $\gamma \leq \alpha$. On a donc $\gamma = \alpha$. □

3. GÉOMÉTRIE LOCALE DES FONCTIONS DE CLASSE $\mathcal{C}^\alpha$

3.1. Etude locale. L'apparition sans fin de structures lors de grossissements successifs rend l'étude du sens de variation d'une courbe non différentiable difficile.

3.1.1. Sur les infiniments petits. Soit Δx un accroissement arbitraire, on a

$\forall \alpha \in]0,1[$, $\dfrac{\Delta x}{(\Delta x)^\alpha} \to 0$ lorsque $\Delta x \to 0$.

Pour tout $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < 1$, on a

$$\Delta x < (\Delta x)^{\alpha_3} < (\Delta x)^{\alpha_2} < (\Delta x)^{\alpha_1} < 1. \tag{64}$$

ce qui signifie que l'accroissement arbitraire Δx dépend aussi de la valeur de α.

La dérivée fractale locale est alors exprimée en fonction de l'accroissement $(\Delta x)^\alpha$ par

$$d_\sigma^\alpha f(x_0) = \Gamma(1+\alpha) \lim_{(\Delta x)^\alpha \to 0} \frac{\sigma\Big(f(x_0 + \sigma\Delta x) - f(x_0)\Big)}{(\Delta x)^\alpha}. \tag{65}$$

3.1.2. Taux de variation d'ordre réel

Définition 3.1. *Soient f une fonction définie et continue sur $[a,b]$ $(a<b)$, x_1, x_2 deux éléments distincts de $[a,b]$. On appelle taux de variation d'ordre $\alpha \in]0,1]$ entre x_1 et x_2 le rapport suivant:*

$$\tau_\alpha^\sigma(x_1,x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{\sigma\Big(\sigma(x_1 - x_2)\Big)^\alpha}. \tag{66}$$

Pour tout $\delta > 0$, on note $J_x^-(\delta)$ (resp. $J_x^+(\delta)$) l'intervalle $]x-\delta, x]$ (resp. $[x, x+\delta[$).

Proposition 3.1. *Soit f une fonction définie, continue sur $[a,b]$ $(a<b)$. Soit x un point de $]a,b[$, $(\Delta x)^\alpha$ un petit accroissement arbitraire, $\alpha \in]0,1]$.*

i/ f est croissante (resp. décroissante) sur $J_x^-(\Delta x)$ si et seulement si $\forall x_1, x_2 \in J_x^-(\Delta x)$, $\tau_\alpha^-(x_1,x_2) \geq 0$ (resp. $\tau_\alpha^-(x_1,x_2) \leq 0$).

ii/ f est croissante (resp. décroissante) sur $J_x^+(\Delta x)$ si et seulement si $\forall x_1, x_2 \in J_x^+(\Delta x)$, $\tau_\alpha^+(x_1,x_2) \geq 0$ (resp. $\tau_\alpha^+(x_1,x_2) \leq 0$).

Proposition 3.2. *Soit f une fonction définie, continue sur $[a,b]$ $(a<b)$, α-dérivable en $x_0 \in]a,b[$, ($\alpha \in]0,1[$).*

i/ $\sigma d_-^\alpha f(x_0) < 0 \iff \exists\ \delta > 0$ tel que $\forall x \in J_{x_0}^-(\delta)$ on a $\sigma(f(x) - f(x_0)) > 0$, $\sigma = \pm$.

ii/ $\sigma d_+^\alpha f(x_0) < 0 \iff \exists\ \delta > 0$ tel que $\forall x \in J_{x_0}^+(\delta)$ on a $\sigma(f(x) - f(x_0)) < 0$, $\sigma = \pm$.

Démonstration - Soit $x_0 \in]a,b[$, on a $d_-^\alpha f(x_0) \leq 0$, alors on a

$$\lim_{(\Delta x)^\alpha \to 0} \frac{\Big(f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)\Big)}{(\Delta x)^\alpha} < 0, \tag{67}$$

donc il existe un $\eta > 0$ tel que $(\Delta x)^\alpha < \eta$, ce qui nous donne $\Delta x < \eta^{\frac{1}{\alpha}}$, alors il existe $\delta = \eta^{\frac{1}{\alpha}}$ tel que le point $x = x_0 - \Delta x \in]x_0 - \delta, x_0]$ et que

$$\lim_{(x_0-x)^\alpha \to 0} \frac{\big(f(x_0) - f(x)\big)}{(x_0 - x)^\alpha} < 0. \tag{68}$$

Donc $\forall \epsilon >, \exists \eta > 0$, tel que pour $(x_0 - x)^\alpha < \eta$, on a

$$\Big| \frac{f(x_0) - f(x)}{(x_0 - x)^\alpha} - \frac{d_-^\alpha f(x_0)}{\Gamma(\alpha + 1)} \Big| < \epsilon, \tag{69}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$-\epsilon + \frac{d_-^\alpha f(x_0)}{\Gamma(\alpha + 1)} < \frac{f(x_0) - f(x)}{(x_0 - x)^\alpha} < \epsilon + \frac{d_-^\alpha f(x_0)}{\Gamma(\alpha + 1)}. \tag{70}$$

Pour ϵ suffisamment petit, on en déduit i/ avec $\sigma = +$. Les autres cas se démontrent de façon analogue. □

Proposition 3.3. - *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et qui admet une dérivée d'ordre $\alpha \in]0, 1[$ en $x_0 \in]a, b[$.*

i/ Si $d_-^\alpha f(x_0) \geq 0$ et $d_+^\alpha f(x_0) \leq 0 \Longleftrightarrow x_0$ est un maximum local.

ii/ Si $d_-^\alpha f(x_0) \leq 0$ et $d_+^\alpha f(x_0) \geq 0 \Longleftrightarrow x_0$ est un minimum local.

Démonstration - Le sens direct découle de la proposition précédente.

Réciproquement, soit $x_0 \in]a, b[$ un maximum local, c'est à dire il exixte $\delta > 0$, tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, on a $f(x) - f(x_0) \leq 0$. Pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0]$, le rapport $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{-(x_0 - x)^\alpha} \geq 0$, par passage à la limite on obtient $d_-^\alpha f(x_0) \geq 0$. De même pour tout $x \in [x_0, x_0 + \delta[$, on a $f(x) - f(x_0) \leq 0$, on en déduit $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^\alpha} \leq 0$, d'oú $d_+^\alpha f(x_0) \leq 0$. De la même façon on montre ii/. □

Théorème de Rolle. - *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, α-dérivable sur $]a, b[$, $\alpha \in]0, 1[$, telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que on a:*

$$d_-^\alpha f(c) \geq 0 \ et \ d_+^\alpha f(c) \leq 0. \tag{71}$$

ou

$$d_-^\alpha f(c) \leq 0 \ et \ d_+^\alpha f(c) \geq 0. \tag{72}$$

Démonstration - La démonstration découle de la proposition precédente, puisque toute fonction continue sur un compact atteint ses bornes. □

Théorème des accroissement finis. - *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, α-dérivables sur $]a,b[$, $\alpha \in]0,1[$, alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que*

$$\sigma[f(b)-f(a)]\ d_-^\alpha g(c) \geq \sigma[g(b)-g(a)]\ d_-^\alpha f(c). \tag{73}$$

et

$$\sigma[f(b)-f(a)]\ d_+^\alpha g(c) \leq \sigma[g(b)-g(a)]\ d_+^\alpha f(c). \tag{74}$$

où $\sigma = \pm$.

Démonstration- On considère la fonction

$$h(x) = f(x)\Big(g(b)-g(a)\Big) - \Big(f(b)-f(a)\Big)g(x). \tag{75}$$

La fonction h est continue sur $[a,b]$, α-dérivable sur $]a,b[$ et $h(a)=h(b)$, le théorème de Rolle permet de conclure. □

3.2. Notion de ϵ-moyennisation. Soit Γ une courbe représentative d'une fonction irrégulière f, nous allons construire une courbe moyenne qui suit l'évolution générale de Γ.

Définition 3.2. *Soit $\epsilon > 0$, on appelle ϵ-moyennisation de la fonction f, et on note $\bar{f}_\epsilon$, la fonction définie par*

$$\bar{f}_\epsilon(t) = \frac{1}{2\epsilon}\int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} f(x)dx. \tag{76}$$

Cette fonction moyenne suit l'évolution de la fontion f suivant l'échelle d'observation ϵ.

Pour toute fonction f, on note D_f son domaine de définition.

Théorème 3.1.- *Soit f une fonction de classe C^α, $\epsilon > 0$, et $\bar{f}_\epsilon$ sa fonction ϵ-moyenne, on a pour tout $t \in D_f$,*

$$\bar{f}'_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon^{1-\alpha}}\mathrm{Re}(f^{(\alpha)}(t)) + o(\epsilon^{\alpha-1}). \tag{77}$$

La démonstration est simple et laissée au lecteur.

On obtient donc directement le théorème suivant sur le sens de variation de $\bar{f}_\epsilon$:

Théorème 3.2. - *Soit $f \in C^{\alpha}(]a,b[)$, $\alpha \in]0,1[$, $\epsilon > 0$ et $\bar{f}_{\epsilon}$ sa ϵ-moyennisation. On a*

i) Pour tout $x \in\ ]a,b[$, $\epsilon^{\alpha-1}\mathrm{Re}(f^{(\alpha)}(x)) < o(\epsilon^{\alpha-1}) \Longleftrightarrow \bar{f}_{\epsilon}$ est décroissante sur $]a,b[$.

ii) Pour tout $x \in\ ]a,b[$, $\epsilon^{\alpha-1}\mathrm{Re}(f^{(\alpha)}(x)) > o(\epsilon^{\alpha-1}) \Longleftrightarrow \bar{f}_{\epsilon}$ est croissante sur $]a,b[$.

Remarque 3.1. Sur une échelle de longueur minimale, c'est à dire ϵ minimale, on retrouve les propriétés obtenues dans le cadre local. On peut présenter les propriétés i), ii), comme suit:

1/ Pour tout $x \in\ ]a,b[$, $d_{-}^{\alpha}f(x)\ +\ d_{+}^{\alpha}f(x) < 0 \Longleftrightarrow f_m$ est décroissante sur $]a,b[$.

2/ Pour tout $x \in\ ]a,b[$, $d_{-}^{\alpha}f(x)\ +\ d_{+}^{\alpha}f(x) > 0 \Longleftrightarrow f_m$ est croissante sur $]a,b[$.

3.3. Effet loupe. On rappelle la notion d'effet loupe (voir par exemple [DD]).

Définition 3.3. - *Soit ϵ un réel strictement positif, On appelle loupe de grandissement à l'échelle ϵ centrée au point (a,b) de $\mathbb{R}^2$, la fonction qui, au point (x,y), fait correspondre le point*

$$(X,Y) = (\frac{x-a}{\epsilon}, \frac{y-b}{\epsilon}). \tag{78}$$

ce qui équivaut à

$$(x,y) = (a+\epsilon X, b+\epsilon Y). \tag{79}$$

Proposition 3.5. -*Soit $\epsilon > 0$, si γ est le graphe d'une fonction continue f alors l'image par une loupe centrée au point (a,f(a)) de γ est le graphe d'une fonction donnée par*

$$F(X) = \frac{f(a+\epsilon X) - f(a)}{\epsilon}. \tag{80}$$

Démonstration: En utilisant la définition 3.3, on a

$$(X, F(X)) = (\frac{x-a}{\epsilon}, \frac{f(x)-f(a)}{\epsilon}). \tag{81}$$

d'où $F(X) = \dfrac{f(x)-f(a)}{\epsilon}$. Comme $X = \dfrac{x-a}{\epsilon}$, on obtient $F(X) = \dfrac{f(a+\epsilon X) - f(a)}{\epsilon}$. $\square$

Définition 3.4. ([DD]) -*La fonction F de la propposition 3.5 s'appelle image de f sous la loupe centrée au point $(a, f(a))$ et d'échelle ϵ.*

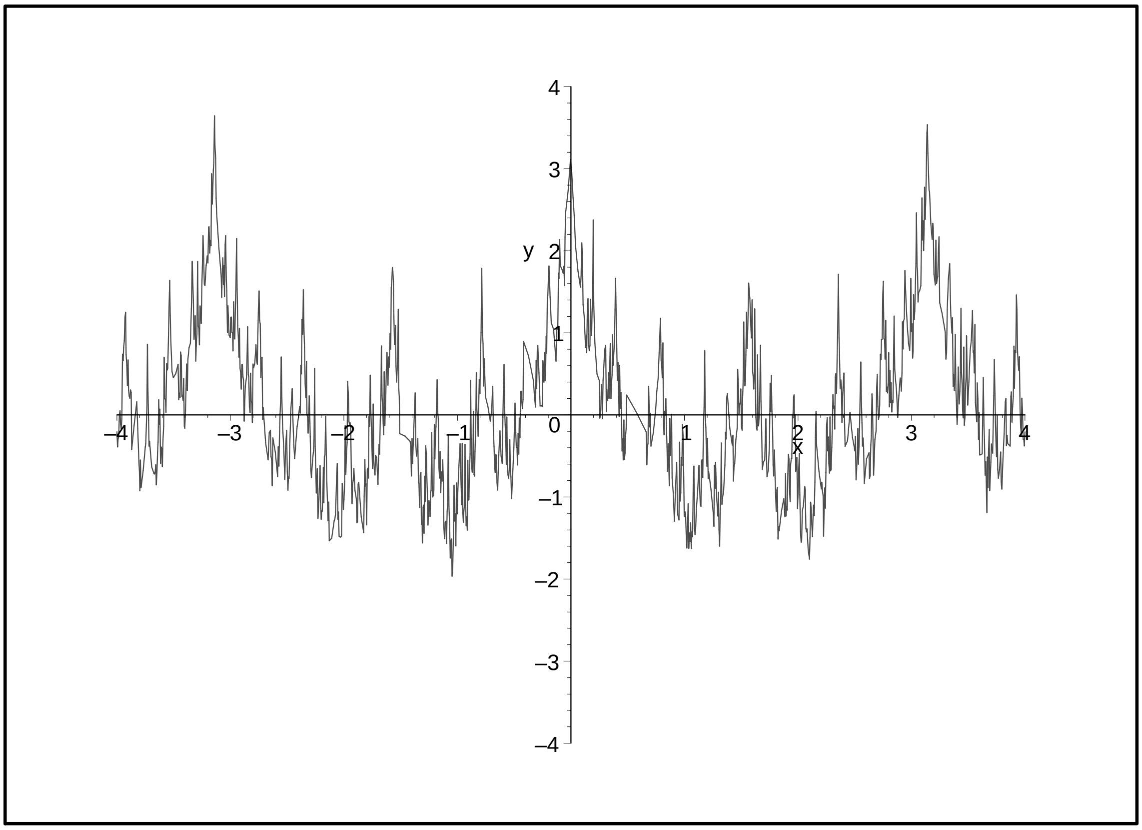

Figure 2: Graphe de la fonction de Weierstrass avec $q = 2$ et $\alpha = 0.3$

3.3.1. Effet loupe sur une courbe irrégulière au voisinage d'un point. Nous pouvons approximer au voisinage d'un point une courbe non dérivable presque partout (ou partout non dérivable), après une transformation qui la fait passer des grandes aux petites échelles. Ainsi nous obtenons une information locale sur la courbe. Nous prenons pour exemple les fonctions de Weierstrass et de Riemann.

(i) Fonction de Weierstrass

$$W_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} q^{-\alpha n} \exp^{iq^n x}, \tag{82}$$

où $0 < \alpha < 1$, et $q > 0$.

L'image par une loupe centrée au point $(a, W_\alpha(a))$ de la courbe représentative γ de $W_\alpha(x)$ est le graphe d'une fonction donnée par

$$F(X) = \frac{W_\alpha(a + \epsilon X) - W_\alpha(a)}{\epsilon} = \sum_{n=1}^{+\infty} q^{-\alpha n} \Big(\frac{\exp^{iq^n (a+\epsilon X)} - \exp^{iq^n a}}{\epsilon} \Big). \tag{83}$$

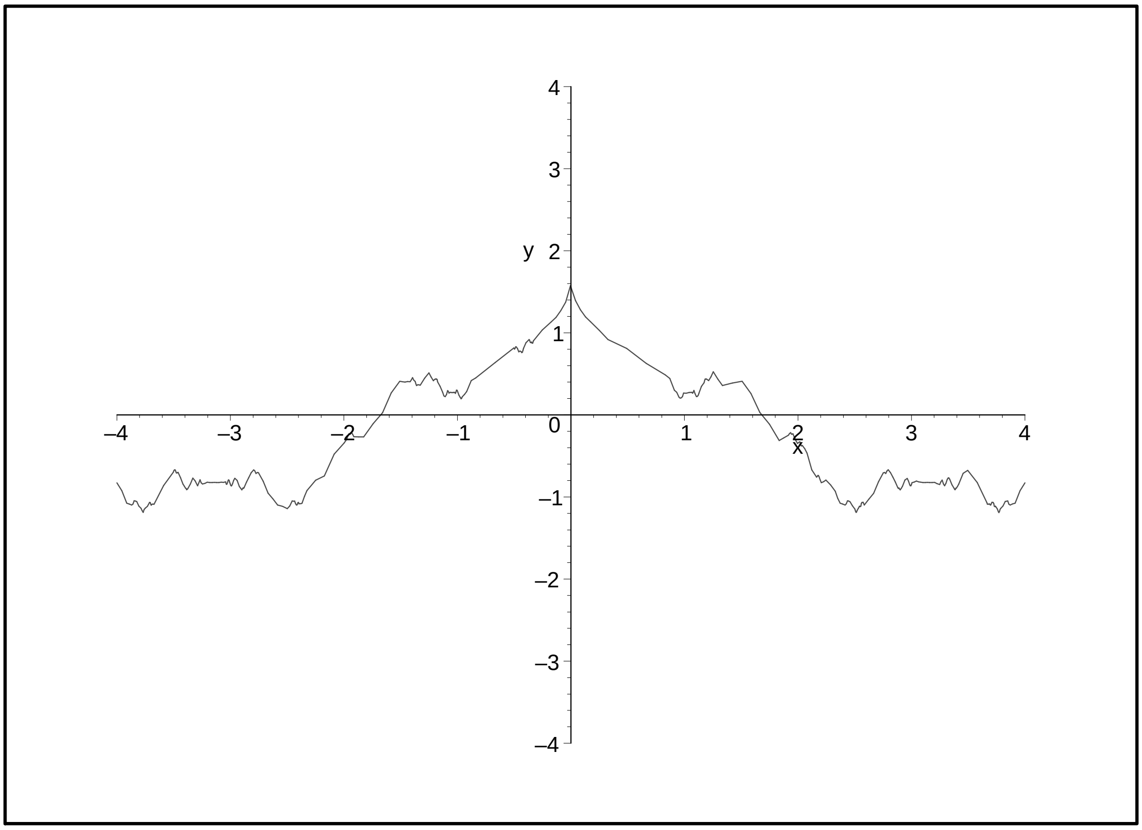

Figure 3: Graphe de la fonction de Riemann

Le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $\exp^{iq^n(a+\epsilon X)}$ sur l'intervalle $[0, X]$ nous permet d'obtenir l'approximation suivante

$$F(X) \simeq X \sum_{n=1}^{+\infty} iq^{n(1-\alpha)} \exp^{ic_n} . \tag{84}$$

Comme $0 < \alpha < 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} iq^{n(1-\alpha)} \exp^{iq^n a}$ diverge .

(ii) Fonction de Riemann

$$R(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{n^2}, \tag{85}$$

cette fonction est non dérivable en tout point x tel que $\dfrac{x}{2\pi}$ est irrationel.

Soit a un réel tel que $\dfrac{a}{2\pi}$ est irrationel, l'image par une loupe centrée au point $(a, R(a))$ de la courbe représentative γ de $R(x)$ est le graphe d'une fonction donnée par

$$F(X) = \frac{R(a+\epsilon X) - R(a)}{\epsilon} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2}\Big(\frac{\cos(n^2(a+\epsilon X)) - \cos(n^2 a)}{\epsilon}\Big). \qquad (86)$$

Le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $\cos(n^2(a+\epsilon X))$ sur l'intervalle $[0, X]$ nous permet d'obtenir l'approximation suivante

$$F(X) \simeq -X \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n^2(a+\epsilon C)). \qquad (87)$$

Pour $\frac{a}{2\pi}$ irrationel, $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n^2(a+\epsilon C))$ est une série divergente.

Dans les deux exemples, l'effet loupe montre que sur une échelle assez petite, une courbe irrégulière est approximée par une droite verticale au voisinage de tout point où elle est non dérivable.

4. DIFFÉRENTIABILITÉ D'ORDRE $\alpha \in]0, 1]$

Dans la suite on définit la notion de différentiabilité d'ordre réel pour la dérivée fractale locale définie au §.1.2.

4.1. Fonction d'une variable.

Définition 4.1. - *Soient f une fonction définie continue sur $[a, b]$, et $\alpha \in]0, 1]$. On dit que f est α-différentiable au point $x_0 \in]a, b[$, s'il existe $L \in \mathbb{R}$ et une fonction $\epsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $\lim_{(\Delta x)^\alpha \to 0} \epsilon((\Delta x)^\alpha) = 0$, avec pour tout x assez voisin de x_0 et $\sigma = \pm$*

$$f(x) = f(x_0) + L\sigma(\sigma(x - x_0))^\alpha + \sigma(\sigma(x - x_0))^\alpha \epsilon(\sigma(\sigma(x - x_0))^\alpha). \qquad (88)$$

avec $L = d_\sigma^\alpha f(x_0) \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}$ pour $\sigma = \pm$.

On note

$$\begin{aligned} d_\sigma^\alpha f_{x_0} : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & h \longmapsto d_\sigma^\alpha f(x_0) \frac{\sigma(\sigma h)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \end{aligned} \qquad (89)$$

qui est une application homogène de degré α.

Remarque. Comme $dx_a(h) = h$, on a $d_\sigma^\alpha f_a(h) = d_\sigma^\alpha f(a) \frac{\sigma(\sigma dx_a(h))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$.

Théorème 4.1. - *Les propriétés suivantes sont équivalentes*
i/ f est α-différentiable au point x_0
ii/ f est localement α-dérivable au point x_0
de plus la différentielle d'ordre α de f au point x_0 est définie par

$$d^{\alpha}_{\sigma} f_{x_0}(h) = d^{\alpha}_{\sigma} f(x_0)\frac{\sigma(\sigma h)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{90}$$

4.2 Fonction de plusieurs variables

Définition 4.2. - *Soit f une fonction continue sur P un pavé de $\mathbb{R}^n$. On dit que $f : P \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est α-différentiable au point $X \in P$, $\alpha \in]0,1]$, s'il existe une application homogène de degré α notée $d^{\alpha}_{\sigma} f_X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ telle que pour tout $H \in \mathbb{R}^n$ on a*

$$f(X+H) = f(X) + d^{\alpha}_{\sigma} f_X(H) + \|(\sigma(H))^{\alpha}\| \epsilon_X(\sigma(\sigma(H))^{\alpha}), \tag{91}$$

avec $\epsilon_X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ vérifiant $\lim\limits_{(\sigma H)^{\alpha}\to 0} \epsilon_X((\sigma H)^{\alpha}) = 0$, et pour $H = (h_1, h_2, \ldots\ldots, h_n)$ on a $(\sigma H)^{\alpha} = ((\sigma h_1)^{\alpha}, (\sigma h_2)^{\alpha} \ldots, \ldots, (\sigma h_n)^{\alpha})$

Remarque - L'égalité (*) est une égalité entre vecteurs de $\mathbb{R}^p$, elle est équivalente en passant aux composantes de ces vecteurs, aux p égalités suivantes

$$\Big(f(X+H)\Big)_i = \Big(f(X)\Big)_i + \Big(d^{\alpha}_{\sigma} f_X(H)\Big)_i + \Big(\epsilon_X(\sigma(\sigma(H))^{\alpha})\Big)_i, \tag{92}$$

représentant respectivement les i-ièmes composantes des vecteurs

$$f(X+H),\ f(X),\ d^{\alpha}_{\sigma} f_X(H),\ \epsilon_X(\sigma(\sigma(H))^{\alpha}). \tag{93}$$

Corollaire 4.1. - *Soient f une fonction continue sur P un pavé de $\mathbb{R}^n$, p_i, $(i = 1, \ldots, p)$ les projections de $\mathbb{R}^p$ sur $\mathbb{R}$. Si l'on désigne par $d^{\alpha}_{\sigma,i} f_X$ la i-ième composante de l'application $d^{\alpha}_{\sigma} f_X$, f est α-différentiable au point $X \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si les applications $f_i = p_i \circ f$ sont α-différentiables en ce point.*

Définition 4.3. (Dérivées partielles d'ordre réel) - *Soient f une fonction continue sur P un pavé de $\mathbb{R}^n$, $X = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ un point de $\mathbb{R}^n$. On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la j-ième composante x_j au point X si f est localement α-dérivable par rapport à x_j et on a*

$$\frac{\partial_{\sigma}}{\partial x_j^{\alpha}} f(X) = \Gamma(\alpha+1) \lim_{(\sigma(x-x_j))^{\alpha}\to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x, x_{j+1} \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, \ldots, x_n)}{\sigma(\sigma(x-x_j))^{\alpha}}. \tag{94}$$

Proposition 4.1. - *Soit f une fonction définie, continue sur P un pavé de $\mathbb{R}^n$. Si f est α-différentiable en un point X de $\mathbb{R}^n$, alors f admet des dérivées partielles d'ordre α par rapport à chacune des variables au point X et on a*

$$d_\sigma^\alpha f_X = \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial_\sigma}{\partial x_i^\alpha} f(X)(\sigma dx_i)^\alpha. \tag{95}$$

Démonstration. Pour $H_i = (0, .., 0, h_i, 0, .., 0) \in \mathbb{R}^n$, la définition 4.2 donne pour $X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} f(x_1, ., x_{i-1}, x_i + \sigma h_i, x_{i+1}, ., x_n) &= f(X) + \tfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)} d_\sigma^\alpha f_X(H_i) + \\ &\quad \|(\sigma(H_i))^\alpha\| \epsilon_X(\sigma(\sigma(H_i))^\alpha). \end{aligned} \tag{96}$$

La définition 4.3 nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} f(x_1, ., x_{i-1}, x_i + \sigma h_i, x_{i+1}, ., x_n) - f(X) &= \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\partial_\sigma}{\partial x_i^\alpha} f(X)(\sigma h_i)^\alpha \\ &\quad +(\sigma h_i)^\alpha \epsilon_X((\sigma(h_i))^\alpha). \end{aligned} \tag{97}$$

D'oú

$$\lim_{H_i \to 0} \frac{1}{\|H_i^\alpha\|} \left(f(x_1, ., x_{i-1}, x_i + \sigma h_i, x_{i+1}, ., x_n) - f(X) - \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\partial_\sigma}{\partial x_i^\alpha} f(X)(\sigma h_i)^\alpha \right) = 0, \tag{98}$$

ce qui exprime la différentiabilitée d'ordre α de f par rapport à la variable x_i. Enfin, par addition sur $i = 1, .., n$, on en déduit la proposition. $\square$

5. INTÉGRALE D'ORDRE RÉEL INDÉFINIE

5.1 α-primitive

On cherche à déterminer une fonction f dont on connait sa dérivée fractionnaire locale d'ordre $\alpha \in]0,1]$.

Définition 5.1. -*On dit qu'une fonction $F(x)$ est une α-primitive d'une fonction f sur un intervalle $]a,b[$ fini ou infini, si elle est localement α-dérivable sur cet intervalle et si sa dérivée fractionnaire d'ordre α vérifie $d^{\alpha}_{\sigma}F(x) = f(x)$ ou $dF(x) = f(x)(dx)^{\alpha}$ pour tout $x \in]a,b[$.*

On note $\mathcal{F}^{\sigma}_{\alpha}$, $\sigma = \pm$, l'ensemble des fonctions f telles que $d^{\alpha}_{\sigma}f = 0$. On appelle "fonction fixe" tout élément de cet ensemble.

Cet ensemble est non vide et contient notamment $\mathcal{H}^{\gamma}$, $\gamma > \alpha$, l'ensemble des fonctions höldériennes d'exposant γ.

Si aucun risque de confusion n'est possible, on omettra le symbole $+$ ou $-$ et on notera simplement $\mathcal{F}_{\alpha}$.

Théorème 5.1. -*Si $F(x)$ est une α-primitive d'une fonction f(x) sur un intervalle]a,b[, il en est de même de la fonction $\phi = F(x) + g(x)$, où $g \in \mathcal{F}_{\alpha}$.*

Si f possède une α-primitive sur $]a,b[$, elle en possède une infinité d'autres sur $]a,b[$, et entre deux α-primitives d'une fonction, il existe une relation donnée par le théorème suivant

Théorème 5.2. -*Si $F(x)$ et $\phi(x)$ sont deux α-primitives d'une fonction $f(x)$ sur un intervalle $]a,b[$, alors $F - \phi \in \mathcal{F}_{\alpha}$.*

Corollaire 5.1. -*Si $F(x)$ est une α-primitive de f sur $]a,b[$, toute autre α-primitive ϕ de f est de la forme $\phi(x) = F(x) + g(x)$ où $g \in \mathcal{F}_{\alpha}$.*

5.2 α-Intégrale indéfinie

L'ensemble des α-primitives d'une fonction $f(x)$ définie sur $]a,b[$ s'appelle α-intégrale indéfinie de $f(x)$ sur $]a,b[$ et se note

$$\int f(x)(dx)^{\alpha}. \tag{99}$$

Si $F(x)$ est une α-primitive de f sur $]a,b[$, le corollaire 5.1. donne

$$\int f(x)(dx)^{\alpha} = F(x) + g(x) + c, \tag{100}$$

où g est une fonction fixe et c une constante arbitraire.

Remarque - toute égalité faisant intervenir des α-intégrales indéfinies est une égalité d'ensembles de α-primitives composés des mêmes éléments.

5.3 Propriétés de la primitive d'ordre réel

1 -*La différentielle d'une α-primitive est égale à l'élément d'intégration*

$$d\Big(\int f(x)(dx)^{\alpha}\Big) = f(x)(dx)^{\alpha}. \tag{101}$$

2 -*La dérivée fractionnaire locale d'ordre α d'une α-primitive est égale à l'intégrant*

$$d_{\sigma}^{\alpha}\Big(\int f(x)(dx)^{\alpha}\Big) = f(x). \tag{102}$$

3 -*La primitive d'ordre α d'une dérivée fractionnaire locale d'ordre α de $f(x)$ est égale à $f(x)$, à une fonction fixe additive près*

$$\int d_{\sigma}^{\alpha}F(x)(dx)^{\alpha} = F(x) + g(x) + c. \tag{103}$$

4 - *Tout facteur constant peut être sorti ou entré sous le signe d'intégration à une fonction fixe additive près*

$$\int \lambda f(x)(dx)^{\alpha} = \lambda \int f(x)(dx)^{\alpha}, \qquad \lambda = const \neq 0. \tag{104}$$

5 - *La primitive d'ordre α d'une somme (resp. d'une différence) de deux fonctions est égale à la somme (resp. à la différence) des primitives d'ordre α de ces fonctions à une fonction fixe additive près*

$$\int f(x) \pm g(x)(dx)^{\alpha} = \int f(x)(dx)^{\alpha} \pm \int g(x)(dx)^{\alpha}. \tag{105}$$

Démonstration: 1/ en effet, puisque $d_{\sigma}^{\alpha}F(x) = f(x)$ sur $]a,b[$, on a

$$d\Big(\int f(x)(dx)^{\alpha}\Big) = d_{\sigma}^{\alpha}\Big(\int f(t)(dt)^{\alpha}\Big)(x)(dx)^{\alpha}. \tag{106}$$

$$= f(x)(dx)^{\alpha}. \tag{107}$$

2/ D'après 1/ on en déduit l'égalité.

3/ si $d^{\alpha}_{\sigma}F(x) = f(x)$ sur $]a, b[$, alors on a

$$\int d^{\alpha}_{\sigma}F(x)(dx)^{\alpha} = \int f(x)(dx)^{\alpha} = F(x) + g(x) + c. \tag{108}$$

4/ Il suffit de voir que

$$d^{\alpha}_{\sigma}\Big(\int \lambda f(x)(dx)^{\alpha}\Big) = \lambda f(x), \tag{109}$$

et

$$d^{\alpha}_{\sigma}\Big(\lambda \int f(x)(dx)^{\alpha}\Big) = \lambda\ d^{\alpha}_{\sigma}\Big(\int f(x)(dx)^{\alpha}\Big) = \lambda f(x). \tag{110}$$

pour déduire l'égalité à une fonction additive fixe près

5/ En effet on a

$$d^{\alpha}_{\sigma}\Big(\int (f(x) \pm g(x))(dx)^{\alpha}\Big) = f(x) \pm g(x), \tag{111}$$

et

$$d^{\alpha}_{\sigma}\Big(\int (f(x) \pm g(x))(dx)^{\alpha}\Big) = d^{\alpha}_{\sigma}\Big(\int f(x)(dx)^{\alpha}\Big) \pm d^{\alpha}_{\sigma}\Big(\int g(x)(dx)^{\alpha}\Big), \tag{112}$$

$$= f(x) \pm g(x). \tag{113}$$

d'où le résultat à une fonction additive fixe près.

6. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FRACTIONNAIRES

Nous introduisons la notion d'équation différentielle fractionnaire associée à la dérivation définie en 1.4. Les équations différentielles données par la dérivée de Riemann- Liouville, se résolvent facilement à l'aide de l'opérateur inverse donné par l'intégrale de Riemann-Liouville. On en déduit même, sous certaines conditions, l'existence et l'unicité des solutions. Nous démontrons que s'il existe une solution à une équation différentielle fractionnaire, alors elle en a une infinité. On donne aussi les premiers principes d'intégration de ces équations.

6.1. Equations différentielles fractionnaires. On appelle *équation différentielle fractionnaire*, une équation de la forme

$$d^{\alpha}y = f(y, t), \tag{114}$$

où $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est une application α-dérivable, dont la variable est $t \in \mathbb{R}$, et $f(y,t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$.

Remarque. Comme $d^\alpha f$ est en général un nombre complexe, il faut considérer des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ et non $\mathbb{R}^n$ comme c'est le cas habituellement.

On appelle donnée de *Cauchy* pour (114) une condition

$$y(t_0) = y_0, \tag{115}$$

où $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et $t_0 \in \mathbb{R}$.

Un problème de Cauchy fractionnaire sera la donnée d'une équation fractionnaire et d'une donnée de Cauchy.

6.1.1. Cas nul. On commence par étudier le cas $n = 1$ et $f(y,t) = 0$. Du théorème 2.1 on déduit

Lemme 6.1. *Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec $f \in \mathcal{H}^\gamma$, où $\alpha < \gamma$, on a $d^\alpha f = 0$.*

On a donc le résultat important suivant :

Théorème 6.1. *Le problème de Cauchy $d^\alpha y = 0$, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec $y(t_0) = y_0$ admet une infinité de solutions.*

Démonstration. L'ensemble des solutions contient $\mathcal{H}^\gamma$, $\gamma > \alpha$ par le lemme 6.1. De plus, la donnée de Cauchy ne permet pas de fixer les fonctions solutions de l'équation différentielle fractionnaire. □

Les fonctions solutions de $d^\alpha y = 0$ seront appelées "fonctions fixes" par la suite. On note $\mathcal{F}^\alpha$ l'ensemble de ces fonctions.

6.1.2. Cas général. On déduit sans peine du théorème 6.1. l'existence d'une infinité de solutions à tout problème de Cauchy fractionnaire.

Théorème 6.2. *S'il existe une solution au problème de Cauchy $d^\alpha y = f(t)$, $y(t_0) = y_0$, alors il en admet une infinité.*

Notons $y(t; t_0, y_0)$ une solution de ce problème, alors $\tilde{y}(t; t_0, y_0) = y(t; t_0, y_0) + g(t; t_0, y_0)$, où g est une fonction fixe telle que $g(t_0) = 0$, est encore une solution. Par exemple, on peut prendre $g \in \mathcal{H}^\gamma$ avec $\alpha < \gamma$ et $g(t_0) = 0$. On a $y \in \mathcal{H}^\alpha$ et $\tilde{y} \in \mathcal{H}^\alpha$. Les solutions diffèrent par des irrégularités moins fortes que la solution initiale y.

A fonction fixe près, on a donc unicité de la solution. Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur les fonctions définies par $f \sim g$ si et seulement si $f - g \in \mathcal{F}^{\alpha}$.

Théorème 6.3. *Le problème de Cauchy $d^{\alpha}y = f(t)$ avec $y(t_0) = y_0$ admet une solution unique dans $\mathcal{C}^{\alpha}/\mathcal{R}$.*

Démonstration. Soient $y_1(t)$ et $y_2(t)$ deux solutions. On a $y(t) = y_1(t) - y_2(t) \in \mathcal{F}^{\alpha}$. On en déduit $y_1 \sim y_2$. □

Théorème 6.4. *Les solutions d'un problème de Cauchy fractionnaire d'ordre α sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^{\alpha}$.*

6.2. Intégration. Ce court paragraphe donne les premiers principes d'intégration des équations différentielles fractionnaires. Nous nous limitons au cas $n = 1$.

Une équation différentielle fractionnaire est donc

$$d^{\alpha}y = a(y,t) + ib(y,t), \tag{116}$$

avec $a(y,t) \in \mathbb{R}$ et $b(y,t) \in \mathbb{R}$.

Soient $[a,b]$ un intervalle fermé quelconque de $\mathbb{R}$. Si f est continue, il existe $u, U \in [a,b]$ tels que

$$f(u) \leq f(x) \leq f(U), \quad \forall x \in [a,b]. \tag{117}$$

Lemme 6.2. *Si $d^{\alpha}_{+}f(x) = 1$ $\forall x \in [a,b]$, alors on a $U = b$.*

Démonstration. Si $U \in]a,b[$, alors U est un maximum local et on doit avoir $d^{\alpha}_{+}f(U) < 0$. C'est impossible par hypothèse.

Si $U = a$, alors U est tel que $f(U) \geq f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. On en déduit $d^{\alpha}_{+}f(a) < 0$.

Si $U = b$, la seule contrainte porte sur la gauche de b et on peut avoir $d^{\alpha}_{+}f(b) = 1$. □

Lemme 6.3. *Si $d^{\alpha}_{-}f(x) = -1$ $\forall x \in [a,b]$, alors $U = a$.*

Démonstration. Si $U \in]a,b[$, U doit être un maximum local et on obtient une contradiction. Si $U = b$, alors comme $f(U) \geq f(x)$ $\forall x \in [a,b]$, on a $d^{\alpha}_{-}f(U) \leq 0$, ce qui est impossible. Le seul cas possible est donc $U = a$. □

On déduit de ces deux lemmes :

Lemme 6.4. *L'équation différentielle $d^\alpha f = i$ n'a pas de solutions pour $0 < \alpha \leq 1$.*

Démonstration. Comme $d^\alpha f = i$, on a $d^\alpha_+ f(x) = 1$ et $d^\alpha_- f(x) = -1$ pour $x \in \mathbb{R}$. Soit $[a,b]$ un intervalle fermé quelconque de $\mathbb{R}$. Des lemmes précédents, on a $U = a$ et $U = b$. On a donc f qui est constante. Si $0 < \alpha < 1$, c'est une contradiction car f est alors dérivable. Si $\alpha = 1$, c'est une contradiction car $d^1_+ f(x) \neq d^1_- f(x)$. □

On a de plus

Théorème 6.5. *L'équation différentielle $d^\alpha f = 1$ n'a pas de solutions pour $0 < \alpha < 1$.*

Démonstration. Montrons que f est injective. On raisonne par l'absurde. Soient x_1, x_2 deux points de $[a,b]$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors, par le théorème de Rolle, il existe un point $c \in [x_1, x_2]$ tel que $d^\alpha_+ f(c).d^\alpha_- f(c) \leq 0$. C'est impossible par l'hypothèse du théorème 6.5 car $d^\alpha_+ f$ et $d^\alpha_- f$ sont du même signe. On a donc f injective.

Comme f est injective et continue, alors f est strictement monotone ([HWa],lemme 3.8,p.207). Par le théorème de Lebesgue ([KF],p.319), cette fonction est dérivable presque partout. Comme $0 < \alpha < 1$, on a une contradiction. □

On déduit des théorèmes précédents :

Théorème 6.6. *Les équations différentielles $d^\alpha f(t) = a(t)$ et $d^\alpha f = ib(t)$ avec $a(t), b(t) \in \mathcal{C}^\gamma$, $\gamma > \alpha$, telles que $a(t) \neq 0$ et $b(t) \neq 0$, n'ont pas de solutions.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Soit f une solution de $d^\alpha f(t) = a(t)$. Alors $d^\alpha(f(t)/a(t)) = (d^\alpha f.a(t) - f(t).d^\alpha a)/a^2(t)$. Comme $a(t) \in \mathcal{C}^\gamma$ avec $\gamma > \alpha$, on a $d^\alpha a = 0$. On a donc $d^\alpha(f/a) = 1$. Or, par le théorème 6.5, cette équation n'a pas de solutions, d'où le résultat. On démontre de même que $d^\alpha f = ib(t)$ n'a pas de solutions.□

Le théorème 6.6 ne permet pas de déduire la non existence de solutions pour l'équation différentielle fractionnaire $d^\alpha f = 1 + i$. On a

Lemme 6.5. *Il n'existe pas de solutions à l'équation différentielle fractionnaire $d^\alpha f = 1 + i$ si $0 < \alpha < 1$.*

Démonstration. La démarche est analogue à celle du théorème 6.5. De $d^\alpha f =$

$1+i$, on déduit $d_+^\alpha f(x) = 2$ et $d_-^\alpha f(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Soit $[a,b]$ un intervalle fermé quelconque de $\mathbb{R}$. Comme $d_+^\alpha f(x) = 1$ sur $[a,b]$, on a $U = b$ avec les notations du lemme 6.2. Soit $u \in]a,b[$ un minimum global de f sur $[a,b]$, alors $f(x) \geq f(u)$ $\forall x \in [a,b]$. Il existe donc $x_0 \in [a,u[$ et $\delta > 0$ tel que $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in [x_0, x_0+\delta[$. Cela implique $d_+^\alpha f(x_0) \leq 0$, ce qui impossible par hypothèse. On a donc $u = a$. De même que pour le théorème 6.5, on peut démontrer que f est alors strictement croissante donc dérivable presque partout. Comme $0 < \alpha < 1$, on obtient une contradiction. □

On déduit du lemme 6.5, le

Théorème 6.7. *Les équations différentielles fractionnaires $d^\alpha f = a(t)(1+i)$, avec $a(t) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ et $a(t) \in \mathcal{F}^\alpha$, n'ont pas de solutions pour $0 < \alpha < 1$.*

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du théorème 6.6. Soit f une solution de $d^\alpha f = a(t)(1+i)$, alors $d^\alpha(f/a) = (1/a)d^\alpha f + f d^\alpha(1/a)$. Comme $a \in \mathcal{F}^\alpha$, on a $d^\alpha(1/a) = 0$. D'où, on a $d^\alpha(f/a) = 1+i$. Or, cette équation n'a pas de solutions par le lemme 6.5, d'où le résultat. □

Nous avons la conjecture suivante:

Conjecture. *L'équation différentielle $d^\alpha f = a(t) + ib(t)$, où $a(t)$ et $b(t)$ sont continues n'a pas de solutions.*

Notons que ce type de résultat caractérise le type de fonction que l'on peut obtenir en dérivant une fonction irrégulière. Le théorème 6.6 assure que la fonction dérivée est au plus dans $\mathcal{C}^\alpha$. La conjecture dit que la fonction dérivée d'une fonction irrégulière est toujours discontinue.

Remarque. Il est délicat d'effectuer un test de la conjecture au moyen de méthodes numériques. Un premier travail en ce sens serait d'obtenir l'allure du graphe de la dérivée fractionnaire de la fonction de Weierstrass.

Exemple. Soit $\delta_0(x)$ la fonction de Dirac en zéro. L'équation différentielle

$$d^\alpha y(t) = i\delta_0(t), \tag{118}$$

admet une infinité de solutions de la forme

$$y(t) = \mid t \mid^\alpha + f(t), \quad f \in \mathcal{F}^\alpha. \tag{119}$$

La recherche de primitive pour la dérivée 1.4 est un problème difficile. Il sera étudié dans un autre travail.

Remarque. Les équations différentielles fractionnaires que nous avons considérées sont très rigides car le α de la dérivation ne varie pas avec le point. C'est une contrainte importante sur la fonction puisqu'elle impose un comportement höldérien uniforme sur la courbe (c'est le cas de la fonction de Waierstrass par un théorème de Hardy [H]). On peut étendre la notion d'équation différentielle fractionnaire aux équations du type

$$d^{\alpha(t)} f = a(t) + ib(t). \tag{120}$$

Dans ce cas, on a, suivant la forme de $\alpha(t)$, une grande souplesse sur la structure de la courbe et les théorèmes de non existence ci-dessus ne sont plus valables.

6.3. Equation différentielle linéaire d'ordre α. On appelle équation différentielle d'ordre α, $0 < \alpha \leq 1$, une équation différentielle de la forme

$$\frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = A(t)y + B(t), \tag{121}$$

où $A(t)$ et $B(t)$ sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

L'équation homogène associée est

$$\frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = A(t)y. \tag{122}$$

Lemme 6.6. *Soient y_1 et y_2 deux solutions de (122). Alors, $fy_1 + gy_2$ est aussi une solution de (122), avec f et g dans $\mathcal{F}^\alpha$.*

Démonstration. Comme f et g sont dans $\mathcal{F}^\alpha$, on a $d^\alpha f = d^\alpha g = 0$. Les formules de dérivation donnent $d^\alpha(fy_1 + gy_2) = fd^\alpha y_1 + y_1 d^\alpha f + gd^\alpha y_2 + y_2 d^\alpha g$. On en déduit $d^\alpha(fy_1 + gy_2) = fA(t)y_1 + gA(t)y_2$, d'où le lemme. □

Lemme 6.7. *Les solutions de l'équation différentielle fractionaire linéaire $d^\alpha y = a(t)y$ sont données par*

$$y(t) = k(t)e^{A(t)}, \tag{123}$$

où $k(t) \in \mathcal{F}^\alpha$ et $d^\alpha A(t) = a(t)$.

Démonstration. On a $d^\alpha(\log(y)) = (1/y)d^\alpha y$. On en déduit $d^\alpha(\log(y)) = a(t)$. Soit $A(t)$ tel que $d^\alpha A(t) = a(t)$, alors $\log(y) = A(t) + v(t)$, où $v \in \mathcal{F}^\alpha$. On a donc $y(t) = k(t)e^{A(t)}$ avec $k(t) \in \mathcal{F}^\alpha$. □

On a aussi :

Lemme 6.8. *Soit y_p une solution particulière (non triviale) de (121). Une fonction y est solution de (121) si et seulement si elle peut s'écrire*

$$y = y_h + y_p, \tag{124}$$

où y_h est solution de l'équation homogène associée.

Démonstration. On a $d^\alpha y_h = A(t)y_h$ et $d^\alpha y_p = A(t)y_p + B(t)$. On a donc $d^\alpha(y_h + y_p) = A(t)(y_h + y_p) + B(t)$.

Réciproquement, soit y une solution de (121). Alors,

$$d^\alpha(y - y_p) = A(t)y + B(t) - A(t)y_p - B(t) = A(t)(y - y_p). \tag{125}$$

La fonction $y - y_p$ est solution de l'équation homogène, d'où le résultat. □

La recherche d'une solution particulière de l'équation se fait, comme dans le cas classique, par la méthode de la variation de la constante "généralisée". Dans la solution du système linéaire, on a $k(t) \in \mathcal{F}^\alpha$. On suppose maintenant $k(t) \in \mathcal{C}^\alpha$ et on cherche une solution particulière sous la forme $y(t) = k(t) \exp A(t)$ avec $k(t) \in \mathcal{C}^\alpha$. Une simple dérivation donne

$$d^\alpha k(t) = B(t) \exp(-A(t)). \tag{126}$$

En intégrant cette équation, on obtient une solution particulière.

On a aussi le résultat suivant :

Théorème 6.8. *Si y_1 et y_2 sont respectivement solutions des équations différentielles*

$$d^\alpha y = A(t)y + B_1(t), \quad d^\alpha y = A(t)y + B_2(t). \tag{127}$$

ayant la même équation homogène associée, alors $y_1 + y_2$ est solution de l'équation

$$d^\alpha y = A(t)y + (B_1(t) + B_2(t)). \tag{128}$$

Démonstration. Il suffit de calculer $d^\alpha(y_1 + y_2)$. □

6.4. Equation différentielle d'ordre n. Le développement de Taylor suggère de définir les équations différentielles d'ordre $\alpha + k$, $k \in \mathbb{N}$ de la manière suivante :

Définition 6.1. *On appelle équation différentielle fractionnaire d'ordre $\alpha + n$, une équation de la forme*

$$\frac{d^{\alpha+n}y}{dt^{\alpha+n}} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{129}$$

où f est une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

L'idée classique est de ramener l'étude de ces équations à celle d'équations différentielles fractionnaires du premier ordre dans un espace plus grand.

On pose

$$z_k = \frac{d^k z}{dt^k},\ k = 1, \ldots, n. \tag{130}$$

L'équation différentielle fractionnaire d'ordre n (129) est donc équivalente au système

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha z_n}{dt^\alpha} &= f(t, y, z_1, \ldots, z_{n-1}), \\ \frac{dz_{n-1}}{dt} &= z_n, \\ &\vdots \\ \frac{dy}{dt} &= z_1. \end{aligned} \tag{131}$$

Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème 6.9. *Les solutions y d'une équation différentielle fractionnaire de la forme (129) sont données par le système d'équations différentielles (131).*

II. Courbes non rectifiables et divergence d'échelle

La physique classique est implicitement basée sur l'hypothèse d'un espace-temps différentiable. En 1993, L. Nottale [N1] a développé une théorie de la relativité d'échelle fondée sur un espace-temps non différentiable. Les objets non différentiables dépendent explicitement de la résolution. On est donc conduit à étudier la dépendance de ces objets en fonction de la résolution, par exemple leur régularité.

Dans ([N2], Appendix A), L. Nottale pose le problème suivant : soit Γ une courbe, de paramétrisation γ, définie sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que la longueur de Γ, notée $L(\Gamma)$ est infinie. Peut-on savoir si la courbe est non différentiable ?

La réponse dépend de la divergence de la longueur de Γ en fonction de l'échelle ϵ. Dans [N2], L. Nottale propose, sans démonstration, le résultat suivant : si la divergence est polynomiale en l'échelle alors la courbe est non différentiable. Si la divergence est plus faible, alors on peut avoir des courbes de toute nature.

Dans cet article, on démontre ce résultat. On établit un lien formel entre la dimension fractale de la courbe, sa divergence d'échelle et son irrégularité locale mesurée par l'ordre de différentiabilité fractale.

Si on suppose que tout arc de la courbe est de longueur infinie (sans préciser son ordre de divergence), alors elle est non rectifiable. La conclusion n'est plus aussi simple lorsque seule une information globale sur la courbe (divergence de sa longueur) est donnée. La difficulté est de lier correctement le comportement local de la courbe (rectifiabilité ou non) au calcul de sa longueur.

L'ordre de divergence de la longueur d'une courbe ne suffit pas à caractériser sa régularité. D'autre part, il existe des courbes rectifiables presque partout dont la dimension fractale est non entière (voir [T], p. 123, c). Le bon invariant de classification des courbes non régulières est donc l'ordre de différentiabilité fractale.

On démontre que la divergence d'échelle d'un graphe de fonction non différentiable est toujours de la forme $\frac{1}{\epsilon^{1/\alpha-1}}$, où α est la valeur minimale des ordres critiques de la fonction.

Il est possible de contraindre la divergence d'échelle par une équation différentielle. On parle dans ce cas de loi d'échelle. On démontre que dans le cas d'une loi d'échelle quadratique, la divergence d'échelle d'une courbe est de type logarithmique.

2. PRÉLIMINAIRES

On appelle courbe Γ, l'image, dans le plan ou l'espace, d'un intervalle $[a, b]$, par une application continue γ. Dans cet article, on ne considère que des courbes simples, c'est à dire sans points multiples.

On utilise les notations o et O. Si f,g sont deux fonctions d'une variable réelle, et si g est toujours ≥ 0, on écrit $f = O(g)$ si il existe une constante $C > 0$ telle que $\mid f(x) \mid \leq Cg(x)$ pour x suffisamment grand. On écrit $f = o(g)$ si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. On écrit $f \sim g$ si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Dans toute la suite, on notera $C \in \mathbb{R}^+$ une constante, éventuellement avec un indice si nécessaire.

2.1. Courbes polygonales d'approximation. Soit Γ une courbe paramétrée par l'application $\gamma(t)$, qui prend ses valeurs sur l'intervalle $[a, b]$ et $K + 1$ valeurs du temps $t_1 = a < t_2 < \ldots < t_{K+1} = b$.

Définition 2.1. - *On appelle courbe polygonale d'approximation de* Γ*, la courbe* P *formée des* K *segments d'extrémités* $\gamma(t_i)$*,* $\gamma(t_{i+1})$*, pour* $i = 1, \ldots, K$*.*

On note S_i, le segment de P d'extrémités $\gamma(t_i)$ et $\gamma(t_{i+1})$ et $L(S) = \mathrm{dist}(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$. On note aussi Γ_i l'arc de Γ dont la corde est S_i.

On introduit deux paramètres caractéristiques de P :

- la longueur maximale des segments de P définie par $s(P) = \max\{L(S_i)\}$;
- la précision de l'approximation de Γ par P définie par $\rho(P) = \max\{\mathrm{dist}(\Gamma_i, S_i)\}$.

2.2. Longueur d'une courbe. La longueur d'un segment S est $L(S)$, celle d'une courbe polygonale P est notée $L(P)$. La longueur d'une courbe Γ est notée $L(\Gamma)$. On a le théorème suivant

Théorème 2.1. - *Soit Γ une courbe simple, et $l_\epsilon = \inf_{s(P)\leq\epsilon} L(P)$, alors $L(\Gamma) = \lim_{\epsilon\to 0} l_\epsilon$.*

Soit (ϵ_n) une suite tendant vers 0. On peut toujours construire une suite (P_n) de courbes polygonales d'approximation telle que $s(P_n) \leq \epsilon_n$. On a la définition suivante

Définition 2.2. -*La courbe Γ est de longueur infinie si $L(P_n)$ tend vers l'infini, i.e. $\sup_n L(P_n) = +\infty$.*

2.3. Mesure de longueur par le compas. Un cas particulier de la méthode des courbes polygonales consiste à faire des pas égaux le long de la courbe Γ: on se fixe une valeur du pas ϵ, on commence au point $A_1 = \gamma(a)$, on cherche avec le compas, le point suivant $A_2 = \gamma(\tau_2)$ sur Γ à distance ϵ de A_1 avec $\tau_2 > a$, et ainsi de suite.

Pour $\epsilon > 0$ fixé, on note P_ϵ la courbe polygonale d'approximation construite par le compas, $N(\epsilon)$ le nombre de sommets de P_ϵ et $L_\epsilon(\Gamma)$ sa longueur.

Lemme 2.1. - *Pour tout $\epsilon > 0$, on a $1 + \dfrac{L_\epsilon(\Gamma)}{\epsilon} \geq N(\epsilon) - 1 \geq \dfrac{L_\epsilon(\Gamma)}{\epsilon}$.*

Démonstration. - Par définition, on a

$$L_\epsilon(\Gamma) = L([A_1, A_2]) + \ldots + L([A_{N(\epsilon)-2}, A_{N(\epsilon)-1}]) + L([A_{N(\epsilon)-1}, A_{N(\epsilon)}]),$$

avec $L([A_{N(\epsilon)-1}, A_{N(\epsilon)}]) \leq \epsilon$ et $L([A_i, A_{i+1}]) = \epsilon$ pour $i = 1, \ldots, N(\epsilon) - 2$. On en déduit le lemme. □

Il est possible de lire la non-différentiabilité d'une fonction sur le type de divergence de $N(\epsilon)$ lorsque $\epsilon \to 0$. Ce nombre est toujours croissant. Sa divergence minimale est donnée par les droites.

Lemme 2.2. - *Soit Γ le graphe de la fonction $f(x) = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et P_ϵ sa courbe polygonale d'approximation sur $[a, b]$, alors $N(\epsilon) = \left[\dfrac{(b-a)}{\epsilon}\sqrt{1+\lambda^2}\right] + 1$ avec $[\ ]$ est la partie entière.*

Démonstration. - Soit $A = (x, \lambda x))$ et $B = (y, \lambda y)$ tels que $y > x$, $L([A, B]) = \epsilon$, on a $L([A, B]) = \sqrt{(x-y)^2 + \lambda^2(x-y)^2}$, d'où $y - x = \dfrac{\epsilon}{\sqrt{1+\lambda^2}}$. On en déduit le lemme. □

En fait, un résultat analogue est vrai pour les graphes de fonctions différentiables.

Lemme 2.3. - *Soit* Γ *le graphe d'une fonction différentiable* f *sur* $[a,b]$, *et* P_ϵ *sa courbe polygonale d'approximation, alors* $N(\epsilon) = \left(\frac{C}{\epsilon}\right)$, $C \in \mathbb{R}^+$.

Démonstration. - Soient $A = (x, f(x))$ et $B = (y, f(y))$, avec $y > x$ tels que $(x-y)^2 + (f(x) - f(y))^2 = \epsilon^2$. Comme f est différentiable, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c).(x-y)$. On a donc $(x-y)^2(1 + (f'(c))^2) = \epsilon^2$, d'où $y - x = C\epsilon$, $C \in \mathbb{R}^+$. On en déduit le lemme. $\square$

Une conséquence du lemme 2.2 est :

Corollaire 2.1. - *Soient* Γ *un graphe d'une fonction continue,* $\epsilon > 0$ *et* P_ϵ *sa courbe polygonale d'approximation, alors* $\epsilon N(\epsilon) \geq C$, $C \in \mathbb{R}^+$.

Démonstration. - Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On note $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$. On considère $\tilde{f}$ la fonction constante sur $[a,b]$ définie par $\tilde{f}(x) = f(a)$ pour $x \in [a,b]$. On a $L(f) > L(\tilde{f})$ ce qui implique $\lim_{\epsilon \to 0} P_\epsilon(f) \geq b - a$. On en déduit $\epsilon N(\epsilon) > C$, $C \in \mathbb{R}^+$. $\square$

2.4. Ordre de divergence. On dira que $f(\epsilon)$ diverge plus vite que $g(\epsilon)$ si $g = o(f)$ et on notera $f > g$. On a $\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^\alpha < \frac{1}{\epsilon^\beta}$.

3. SUR LES COURBES NON RECTIFIABLES

Soit Γ une courbe paramétrée par une application $\gamma : [a,b] \to \Gamma$.

3.1. Non rectifiabilité. Soit $\epsilon > 0$ et $x \in \Gamma$, on note $B_\epsilon(x)$ la boule de centre x et de rayon ϵ. On note $C_\epsilon(x)$, le cône de sommet x et d'angle au sommet $\theta_\epsilon(x)$ tel que pour tout $y \in \Gamma \cap B_\epsilon(x)$, on a $y \in C_\epsilon(x)$. On appelle *cône local*, le cône $C_\epsilon(x)$ d'angle au sommet $\theta_\epsilon(x)$ minimum. Si un tel cône n'existe pas, on pose $\theta_\epsilon(x) = \pi$.

Définition 3.1. - *Une courbe* Γ *est dite non rectifiable si pour tout point* $x \in \Gamma$, *l'angle* $\theta_\epsilon(x)$ *ne tend pas vers* 0, *i.e.* $\lim_{\epsilon \to 0} \sup \theta_\epsilon(x_0) > 0$.

La non rectifiabilité de la courbe Γ est équivalente à la non existence d'une tangente à Γ en tout point $x \in \Gamma$.

3.2. Oscillation. On appelle τ-oscillation de la fontion f en t

$$\begin{aligned} \mathrm{osc}_\tau(t) &= \sup_{|t-t'|\leq\tau} f(t') - \inf_{|t-t'|\leq\tau} f(t'), \\ &= \sup\{f(t') - f(t"), \text{ où } t, t" \in [t-\tau, t+\tau]\}. \end{aligned} \tag{132}$$

Il est possible de caractériser les courbes fractales au moyen de l'oscillation.

Théorème 3.1. - *Le graphe de* Γ *est fractal si* $\dfrac{\mathrm{osc}_\tau(t)}{\tau} \to +\infty$ *lorsque* $\tau \to 0$, *uniformément par rapport à* t.

3.3. Hölder et Hölder inverse. Une classe particulière de courbes non rectifiables est donnée par les graphes de fonctions Höldériennes. Soit $0 < H \leq 1$, on a:

Définition 3.2. - *La fonction* $f(t)$ *est höldérienne d'exposant* H *en* t *s'il existe une constante* c *telle que pour tout* t', $\mid f(t) - f(t') \mid \leq c \mid t - t' \mid^H$.

En terme d'oscillations, nous obtenons

Définition 3.3. - *La fonction* $f(t)$ *est höldérienne d'exposant* H *en* t, *s'il existe une constante* c *telle que pour tout* τ, $\mathrm{osc}_\tau(t) \leq c\tau^H$.

On introduit aussi la notion de "Hölder inverse".

Définition 3.4. - *La fonction* $f(t)$ *est inversement höldérienne d'exposant* H *en* t *s'il existe une constante* $c > 0$ *telle que pour tout* τ, $\mathrm{osc}_\tau(t) \geq c\tau^H$.

La condition de Hölder et Hölder-inverse sont non contradictoires. Par exemple, la fonction de Weierstrass possède en tout point t les deux propriétés à la fois.

3.4. Variation et dimension fractale d'un graphe. Soit f une fonction continue non constante, on définit la τ-oscillation de la fonction $f(t)$ sur l'intervalle $[a, b]$ comme

$$\mathrm{Var}_\tau = \int_a^b \mathrm{osc}_\tau(t)dt. \tag{133}$$

La dimension fractale du graphe de f est définie par

$$\Delta(f) = \limsup_{\tau \to 0} \left(2 - \frac{\log \mathrm{Var}_\tau(f)}{\log \tau}\right). \tag{134}$$

4. GRAPHES DE FONCTIONS ET DIVERGENCE D'ÉCHELLE

Soit f une fonction continue définie sur $[a, b]$, on note Γ_f son graphe et $L(f)$ la longueur de Γ_f.

On démontre le théorème suivant :

Théorème A. - *Soit f une fonction continue, définie sur un intervalle $[a, b]$, si $L_\epsilon(f) \succ \frac{1}{\epsilon^\delta}$ avec $\delta > 0$, alors il existe un arc de Γ_f, non réduit à un point, sur lequel f est non rectifiable presque partout.*

Démonstration. - Comme $L_\epsilon(f) = O\left(\frac{1}{\epsilon^\delta}\right)$, on en déduit, via le lemme 2.1, $N(\epsilon) = O\left(\frac{1}{\epsilon^{\delta+1}}\right)$. Si f est différentiable, alors $N(\epsilon) = 0\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$ par le lemme 2.3. On a donc une contradiction et f est non différentiable presque partout. □

4.1. Dimension fractale et divergence d'échelle. Soit f une fonction höldérienne d'exposant H, $0 < H \leq 1$ et inverse-hölder d'exposant H. On a le résultat suivant :

Théorème 4.1. *La dimension fractale du graphe de f est $\Delta(f) = 2 - H$.*

On renvoie à Tricot ([T], p.154-155) pour la démonstration.

Soit f une fonction continue, α-dérivable. On définit l'*ordre critique* α en y comme

$$\alpha(y) = \sup\{q \mid \ d^p f(y) \text{ existe pour } p < q\}. \tag{135}$$

On déduit du théorème (I,2.3) :

Corollaire 2.1. *Si l'ordre critique de la fonction $f(x)$ en tout point x est α alors $\Delta(f) = 2 - \alpha$.*

Ce dernier résultat complète les différentes relations existant entre l'ordre critique, l'exposant de Hölder et la dimension fractale.

Une relation entre la divergence d'échelle et la dimension fractale de la courbe est donnée par le théorème suivant :

Théorème B. *Soit f une fonction hölder et hölder-inverse d'exposant $0 < H \leq 1$, alors pour $0 < \epsilon$, on a $L_\epsilon(f) = O\frac{1}{\epsilon^\delta}$ avec $\delta = \frac{1}{H} - 1 = \frac{1}{2 - \Delta(f)} - 1$.*

Démonstration. - Soient $A = (x, f(x))$ et $B = (y, f(y))$ avec $y > x$ tels que $L([A, B]) = \epsilon$. Comme f est höldérienne et inverse höldérienne d'exposant H, on a

$$\epsilon^2 = c^2(x - y)^{2H} + (x - y)^2. \tag{136}$$

Alors, $\epsilon^2 \geq c^2(x - y)^{2H}$ et on a

$$y - x < \frac{1}{c^2}\epsilon^{1/H}. \tag{137}$$

On en déduit le théorème B. □

4.2. Exemples. On donne quelques exemples classiques de fonctions höldériennes et inverse höldériennes d'exposant H, avec $0 < H \leq 1$.

4.2.1. La fonction de Knopp. Soit un paramètre H, $0 < H < 1$, et $g(t)$ la fonction de période 1, définie sur $[0, 1]$ par

$$g(t) = \begin{cases} 2t, & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1/2, \\ 2 - 2t, & \text{si} \quad 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{138}$$

La fonction de Knopp (ou de Takagi) s'écrit

$$K(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-nH} g(2^n t). \tag{139}$$

Il est facile de vérifier que :

Lemme 4.1. - *La fonction de Knopp est höldérienne et inversement höldérienne d'exposant H.*

On renvoie à Tricot ([T], p.167-169).

4.2.2. La fonction de Weierstrass. La fonction de Weierstrass est définie par

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^{-nH} \cos(\omega^n t + \phi_n), \tag{140}$$

où $\omega > 1$ et $0 < H < 1$.

On peut montrer que :

Lemme 4.2. *La fonction de Weierstrass est uniformément höldérienne et inverse höldérienne d'exposant H.*

On renvoie à Hardy [H] pour la démonstration.

4.2.3. Invariance par changement d'échelle. Soit $f(t)$ une fonction continue, définie pour tout $t \geq 0$ et telle que

$$f(\rho t) = \delta f(t), \tag{141}$$

où ρ et δ sont des constantes, telles que $0 < \rho \leq \delta < 1$. On démontre alors que f est höldérienne en 0 d'exposant $H = \dfrac{\log \delta}{\log \rho}$.

5. COURBES FRACTALES ET AUTRES

5.1. Une conjecture. On a

Conjecture. - *Soit* Γ *une courbe de paramétrisation* γ *définie sur* $[a,b]$*, telle que* $L_\epsilon(\Gamma) \succ \dfrac{C}{\epsilon^\delta}$ *avec* $\delta > 0$*, alors il existe un arc* $\mathcal{A}$ *de* Γ *sur lequel elle est non rectifiable presque partout.*

Dans le cas des courbes quelconques, il peut exister des divergences de longueur plus faibles que la divergence polynomiale (ce qui n'est pas le cas pour les graphes de fonctions, voir §.6). Le prochain paragraphe explore ce domaine.

5.2. Un exemple. Soit S un segment orienté et ϕ un angle tel que $0 \leq \phi \leq \pi/2$, on appelle T_ϕ l'opération qui consiste à remplacer S par la courbe polygonale $T_\phi(S)$, de mêmes extémités que S, constituée de quatre segments égaux formant avec S les angles 0, ϕ, -ϕ et 0 respectivement. La longueur de chacun des segments est donc $\dfrac{L(S)}{2(1+\cos\phi)}$.

On se donne une suite d'angle (ϕ_k) et l'on part d'un segment initial P_0 de longueur 1. On forme la courbe polygonale $P_1 = T_{\phi_1}(P_0)$. On pratique sur chacun de ces quatre segments l'opération T_{ϕ_2}, ceci donne au total une courbe polygonale P_2 faite de 16 segments, et ainsi, la courbe P_k est obtenue à partir de P_{k-1} en remplacant chacun des segments au moyen de l'opération T_{ϕ_k}. La courbe P_k est faite de 4^k segments, tous de longueur

$$l_k = 2^{-k} \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1+\cos\phi_i}. \tag{142}$$

Les courbes P_k convergent vers une courbe Γ au sens de la distance de Hausdorff.

La régularité de la courbe Γ dépend de la suite ϕ_k.

(a) Si $\phi_k = \pi/3$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $L(P_k) = (4/3)^k$. On pose $\epsilon_k = l_k$, alors $k = \dfrac{\log(1/\epsilon)}{\log 2 + \sqrt{3}}$. On en déduit

$$\log L_{\epsilon_k}(\Gamma) = \log(4/3)\frac{\log(1/\epsilon)}{\log 2 + \sqrt{3}}. \tag{143}$$

Cette divergence est plus faible qu'une divergence de type polynomiale.

(b) Si $\phi_k = \arccos(2\exp(-1/(k+1)^2) - 1)$, alors $l_k = \dfrac{2^{-(k-1)}}{k!^2}$. La formule de Stirling donne pour k assez grand $k! \sim \sqrt{2\pi}\sqrt{k}k^{2k}e^{-2k}$. En notant ϵ_k pour l_k, on obtient donc

$$2k\log\left(\frac{k}{e^2}\right)\sim\log\left(\frac{1}{\pi\epsilon}\right). \tag{144}$$

Comme $\log k > \dfrac{1}{k^\alpha}$ pour $\alpha > 0$ et k assez grand, on déduit de (144),

$$k < \frac{1}{2e^{2\alpha}}\left(\log\frac{1}{\pi\epsilon}\right)^{\dfrac{1}{1-\alpha}}, \tag{145}$$

pour k assez grand et $\alpha > 0$.

La divergence dans le cas (a) et (b) sont comparables. Pourtant, la courbe en (a) est fractale (au sens de Tricot [T]), alors que la courbe en (b) est rectifiable.

Il n'y a donc pas moyen de distinguer les courbes différentiables et non différentiables par leur divergence lorsque celle-ci est plus faible qu'une divergence de type polynomiale. Précisément :

Théorème C. - *Soit Γ une courbe de paramétrisation $\gamma(t)$ définie pour $t\in[a,b]$, telle que $L_\epsilon(\Gamma)\prec\log\dfrac{1}{\epsilon}$, alors $\gamma(t)$ peut être différentiable ou non différentiable presque partout.*

6. DIFFÉRENTIABILITÉ FRACTIONNAIRE ET DIVERGENCE D'ÉCHELLE

On discute le lien entre dérivation d'ordre réel au sens de Riemann-Liouville et divergence d'échelle. On commence par montrer que dans le cas des graphes de fonctions, la divergence est au minimum polynomiale en ϵ (il ne peut exister de divergence logarithmique comme c'est le cas dans l'exemple 5.1). On montre ensuite que la divergence d'échelle est contrôlée par l'ordre maximal de différentiabilité réel.

6.1. Divergence minimale des graphes. Soit f une fonction continue, définie sur l'intervalle $[a,b]$ et α-dérivable. On a

Théorème D. - *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, α-dérivables (resp. α_0-dérivable) telles que $\alpha<\alpha_0$ et $d^\alpha f$ (resp. $d^{\alpha_0}g$) bornée sur $[a,b]$, alors $L_\epsilon(f)\succ L_\epsilon(g)$.*

La démonstration repose sur la formule de Taylor rappelée dans la partie I.

Démonstration. - On a
$$\lim_{x\to y} \frac{R(x,y)}{(x-y)^\alpha} = 0, \tag{146}$$
par définition du reste du développement de Taylor et
$$f(x) - f(y) = (x-y)^\alpha \left(\frac{d^\alpha f(y)}{\Gamma(\alpha)} + \frac{R(x,y)}{(x-y)^\alpha} \right). \tag{147}$$
Soit $A = (x, f(x))$ et $B = (y, f(y))$ deux points tels que $L([A,B]) = \epsilon$, alors
$$(x-y)^2 + (x-y)^{2\alpha} \left(\frac{d^\alpha f(y)}{\Gamma(\alpha)} + \frac{R(x,y)}{(x-y)^\alpha} \right)^2 = \epsilon^2. \tag{148}$$
Pour $\epsilon > 0$ assez petit, on a
$$(x-y)^{2\alpha} \geq \frac{\epsilon^2 \Gamma(\alpha)^2}{(d^\alpha f(y) + \Gamma(\alpha))^2}. \tag{149}$$
En prenant la racine $1/2\alpha$-ème de cette expression, on obtient $x - y \geq \epsilon^{1/\alpha}$. On a donc $N(\epsilon) \leq 1/\epsilon^{1/\alpha}$, ce qui donne via le lemme 2.1, $L_\epsilon(f) = O(\frac{1}{\epsilon^{1/\alpha - 1}})$.

On a donc
$$\frac{L_\epsilon(f)}{L_\epsilon(g)} \sim const.\ \epsilon^{\frac{\alpha-\alpha_0}{\alpha_0 \alpha}}. \tag{150}$$
Comme $\alpha < \alpha_0$, on en déduit le résultat. □

Corollaire 6.1. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, α_0-dérivable, avec $d^\alpha f$ bornée, alors pour $\alpha < \alpha_0$, on a $L_\epsilon(f) \succ \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{\alpha}-1}}$.*

7. APPLICATIONS DE TYPE R, RÉSOLUTION ET ÉCHELLE

7.1. Applications de type R. La notion d'échelle ou de résolution est floue. On définit une notion d'application dépendant explicitement de la résolution, que nous appelons de type R. Dans [N1], Nottale appelle ce type d'application *fractale*, mais cela peut prêter à confusion avec la notion de courbe fractale introduite par Tricot [T].

Définition 7.1. *Une application $f(t,\delta)$ définie pour $(t,\delta) \in [a,b] \times \mathbb{R}$ est dite de type R si les conditions suivantes sont satisfaites :*

i) $f(t,\delta)$ est différentiable presque partout pour $\delta \neq 0$;

ii) lorsque $\delta \to 0$, $f(t,\delta) \to f(t)$ avec $f(t)$ non rectifiable presque partout.

Un exemple simple d'application de type R est obtenu en considérant les paramétrisations des courbes polygonales d'approximation associées à une courbe non rectifiable presque partout. Ces applications interviennent de manière naturelle en relativité d'échelle.

7.2. Résolution en temps et espace. On introduit maintenant des définitions formelles de la résolution en temps et espace.

Définition 7.1. *Une résolution en temps d'un intervalle $[a,b]$ est la donnée d'un paramètre $\delta \in \mathbb{R}^+$ et de l'ensemble $T = (t_i)_{i=1,\dots,n(\delta)}$ défini par $t_i = a + i\dfrac{(a-b)}{\delta}$, appelé représentation résolue de $[a,b]$ à la résolution δ.*

Dans ([N1],[N2]), la notion de résolution est définie par la relation sur $\mathbb{R}$ suivante $t \sim t'$ si et seulement si $\mid t - t' \mid < \delta$. Cette relation n'est pas (contrairement à ce qui est postulé dans [N2]: on prend $\delta = 0.1$, $t = 1$, $t_1 = 0.91$, $t_2 = 1.09$, alors $t \sim t_1$, $t \sim t_2$, mais on a pas $t_1 \sim t_2$.) une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$. De plus, la structure de l'ensemble quotient $\mathbb{R}/\sim$ est difficile à visualiser. Nous renvoyons à [CD] où une notion d'espace de résolution est définie de manière intrinsèque.

Définition 7.2. *Une résolution en espace d'une courbe Γ, paramétrée par l'application $\gamma(t)$, est la donnée d'un paramètre $\epsilon > 0$ et de sa courbe polygonale d'approximation Γ_ϵ.*

On remarque que la résolution en espace n'est pas (formellement) liée à un quelconque espace dans lequel serait plongée la courbe. C'est une notion intrinsèque associée à l'objet.

On note Γ le graphe de paramétrisation $\gamma(t)$. On associe naturellement à une résolution en temps, une résolution en espace de la manière suivante :

$$\epsilon(\delta) = \min_{i=1,\dots,n(\delta)-1} \epsilon_i, \tag{151}$$

avec

$$\epsilon_i = \parallel (\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \parallel . \tag{152}$$

En physique, la contrainte de résolution en temps et espace existe. Le paramètre "physique" important dans la théorie de la relativité d'échelle sera le quotient

$$r = \frac{\epsilon}{\epsilon(\delta)}, \tag{153}$$

qui joue le rôle d'une *échelle* de mesure en espace, permettant de quantifier laquelle des deux résolutions pose la contrainte la plus importante.

On peut préciser le rapport existant entre la résolution en temps et espace dans le cas d'un graphe de fonction.

Lemme 7.1. *Soit $f(t)$ une fonction définie sur $[a,b]$, $0 < \alpha(t) < 1$ dérivable pour tout $t \in [a,b]$. On a $\epsilon \sim \delta^{\alpha}$ avec $\alpha = \max_{t \in T} \alpha(t)$.*

Démonstration. On a $\mid f(t+\delta) - f(t) \mid \leq C\delta^{\alpha(t)}$ pour δ assez petit. Par définition, on a

$$\parallel (t_i, f(t_i)), (t_{i+1}, f(t_{i+1})) \parallel^2 = \delta^2 + (f(t_i+\delta) - f(t_i))^2. \tag{154}$$

On a donc $\parallel (t_i, f(t_i)), (t_{i+1}, f(t_{i+1})) \parallel^2 < \delta^2 + C^2\delta^{2\alpha(t_i)}$, soit $\parallel (t_i, f(t_i)), (t_{i+1}, f(t_{i+1})) \parallel^2 \sim \delta^{2\alpha(t_i)}$. On en déduit le lemme. □

7.3. Courbe résolue et α-dérivabilité. On considère une classe spéciale d'applications de type R, obtenue en prenant l'application résolue en temps d'une application α-dérivable. On explicite le lien existant entre la courbe résolue et l'objet limite non différentiable.

Soit $f(t)$ une fonction définie sur $[a,b]$, $0 < \alpha(t)$ dérivable pour tout $t \in [a,b]$. On note $f(t,\delta)$ la fonction définissant la courbe polygonale reliant les points $(t_i, f(t_i))$ avec $t_i \in T$.

Lemme 7.2. *Pour tout $\delta > 0$ suffisamment petit, il existe $c_i(\delta) \in I_i =]t_i, t_{i+1}[$ tel que pour tout $t \in I_i$,*

$$\mid f'(t,\delta) \mid \leq \mid f^{\alpha(c_i(\delta))}(c_i(\delta)) \mid \delta^{\alpha-1}. \tag{155}$$

Démonstration. - Pout $t \in I_i$, on a par définition $f'(t,\delta) = \dfrac{f(t_i+\delta) - f(t_i)}{\delta}$. Par le théorème des accroissements finis pour les fonctions α-dérivables (chapitre 1), il existe $c_i(\delta) \in I_i$ tel que $\mid f(t_i+\delta) - f(t_i) \mid \leq \mid f^{\alpha(c_i(\delta))}(c_i(\delta)) \mid \delta^{\alpha}$. On en déduit le lemme. □

8. LOIS D'ÉCHELLE

Les théorèmes A et C donnent le rapport existant entre rectifiabilité et divergence d'échelle dans le cas où cette dernière est de type $\dfrac{1}{\epsilon}^{\alpha} \left(\log_n \dfrac{1}{\epsilon}\right)^{\beta}$, avec $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

L'ordre de croissance de ces fonctions est donné par

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\log L_\epsilon}{\log \epsilon} = \alpha. \tag{156}$$

Evidemment, il existe des divergences comprises entre $\left(\log \frac{1}{\epsilon}\right)^\beta$ et $\frac{1}{\epsilon}^\alpha$, par exemple, la fonction $\exp(-\log \epsilon)^2)$. Dans [N2], Nottale suppose que la divergence des courbes en fonction de l'échelle est solution d'une équation différentielle. On montre que dans le cas d'une loi d'échelle quadratique les divergences sont toujours de type logarithmique, c'est à dire de la forme $\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^\alpha \left(\log_n \frac{1}{\epsilon}\right)^\beta$. On étudie ensuite la covariance des lois d'échelle sous la transformation d'inversion $(\mathcal{L}, \epsilon) \to (1/\mathcal{L}, 1/\epsilon)$. On en déduit l'existence d'une brisure de symétrie d'échelle.

8.1. Loi d'échelle. On appelle *loi d'échelle*, la donnée d'une équation différentielle de la forme

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\tau} = E(\mathcal{L}), \tag{157}$$

où $\mathcal{L}$ est une longueur, et $E(\mathcal{L})$ une application et $\tau = \log \epsilon$.

On retrouve les lois d'échelle classiques (logarithmique, polynomiale) par un bon choix de l'application E.

(i) Si $E(\mathcal{L}) = a$, $a < 0$, on obtient $\mathcal{L}(\tau) = a\tau$, soit $\mathcal{L}_\epsilon = \mathcal{L}(\tau) =\mid a \mid \log \frac{1}{\epsilon}$.

(ii) Si $E(\mathcal{L}) = b\mathcal{L}$, $b > 0$, alors $\mathcal{L}(\tau) = e^{b\tau}$, ce qui donne $\mathcal{L}_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^b}$.

On appelle loi d'échelle *quadratique*, la loi d'échelle définie par

$$E(\mathcal{L}) = a + b\mathcal{L} + O(\mathcal{L}^2). \tag{158}$$

Cette loi intervient de manière naturelle en relativité d'échelle (voir [N2],§.3.1.1). Nous avons le lemme suivant :

Lemme 8.1. *Les courbes satisfaisant (158) ont des divergences de type*

$$\mathcal{L}_\epsilon = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^b \frac{a + b\mathcal{L}_0}{b} - \frac{a}{b},$$

où $K \in \mathbb{R}$ *et* $\epsilon_0 > 0$.

Démonstration. - Il suffit de résoudre l'équation différentielle. On a

$$\frac{d\mathcal{L}}{a + b\mathcal{L}} = bd\tau. \tag{159}$$

En intégrant entre $\tau = \log\epsilon$ et $\tau_0 = \log\epsilon_0$, on obtient

$$\mathcal{L}(\tau) = \frac{1}{b}Ke^{b(\tau-\tau_0)}(a + b\mathcal{L}(\tau_0)) - a). \tag{160}$$

En remplacant τ par son expression, on en déduit le lemme. □

8.2. Loi de transformation d'échelle. Soient ϵ et ϵ' deux résolutions, on appelle *échelle* et on note $e(\epsilon, \epsilon')$ la quantité

$$e(\epsilon, \epsilon') = \log\left(\frac{\epsilon}{\epsilon'}\right). \tag{161}$$

On suppose que les longueurs vérifient la loi d'échelle linéaire à coefficient constant

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\tau} = b\mathcal{L}, \tag{162}$$

où $\tau = \log\epsilon$, alors

$$\mathcal{L}_\epsilon = \mathcal{L}_0\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^b, \tag{163}$$

pour ϵ_0 une résolution de référence donnée.

Soit ϵ' une seconde résolution, on a encore

$$\mathcal{L}_\epsilon = \mathcal{L}_{\epsilon'}\left(\frac{\epsilon}{\epsilon'}\right), \tag{164}$$

d'où

$$\log\mathcal{L}_\epsilon = \log\mathcal{L}_{\epsilon'} + \log e(\epsilon, \epsilon'). \tag{165}$$

En suivant ces calculs, il est facile de démontrer le

Lemme 8.2. *Si les longueurs vérifient une loi d'échelle linéaire à coefficient constant, alors les échelles vérifient $e(\epsilon", \epsilon) = e(e", \epsilon') + e(\epsilon', \epsilon)$ pour toutes résolutions ϵ, ϵ', $\epsilon"$ données.*

9. COURBES FRACTALES ET RÉSOLUTION MINIMALE

Nous définissons un critère naturel d'équivalence entre le comportement d'une courbe et celui de sa δ-moyennisation. On en déduit l'existence pour les courbes fractales d'une résolution minimale, au dessous de laquelle le comportement fractal l'emporte sur le comportement moyen, alors qu'au dessus la δ-moyennisation est prépondérante. On démontre aussi que les δ-moyennisations d'une courbe vérifient une loi d'échelle explicite, dont les paramètres sont quantifiés.

9.1. Critère de δ-moyennisation et résolution minimale. On note $\delta > 0$ la résolution en temps et $\epsilon > 0$ la résolution en espace.

A toute fonction $t \mapsto z(t)$, et tout $\delta > 0$, on associe une δ-moyennisation notée $\bar{z}_\delta(t)$. Nous avons le lemme suivant:

Lemme 9.1. *$\forall \delta > 0$, on a $\bar{z}_\delta - z(t) \leq osc_\delta z(t)$.*

Démonstration. On a

$$\bar{z}_\delta - z(t) = \frac{1}{2\delta}\int_{t-\delta}^{t+\delta} z(s)ds - \frac{1}{2\delta}\int_{t-\delta}^{t+\delta} z(t)ds = \frac{1}{2\delta}\int_{t-\delta}^{t+\delta}(z(s) - z(t))ds. \quad (166)$$

Or, par définition de l'oscillation, on a

$$z(s) - z(t) \leq osc_\delta z(t), \quad \forall s \in [t-\delta, t+\delta], \quad (167)$$

d'où le lemme. □

Pour les fonctions différentiables $f(t)$, on démontre facilement

Lemme 9.2. *Pour toute fonction différentiable $f(t)$ et tout $\delta > 0$, on a $osc_\delta f(t) = O(\delta)$.*

Autrement dit, on a

$$\bar{f}_\delta(t) - f(t) = O(\delta). \quad (168)$$

Dans le cas différentiable, les fonctions moyennes sont de bonnes représentations de la fonction. Un critère de validité de la représentation moyenne pour une fonction quelconque est donc

Définition 9.1. *Soit $z(t)$ une fonction et $\bar{z}_\delta(t)$ sa δ-moyennisation, on dira que $\bar{z}_\delta(t)$ représente bien la fonction $z(t)$ si $osc_\delta z(t) = O(\delta)$ pour tout $t \in D_z$.*

Evolution de la représentation moyenne. Les figures qui suivent donnent l'évolution de la représentation moyenne de la fonction de Weierstrass (chap.1, §.3.3.1) suivant le paramètre δ.

L'oscillation de la courbe est associée à la donnée d'une résolution en espace. En suivant la démarche du §.7.2, une résolution temporelle $\delta > 0$ étant donnée, on lui associe naturellement une résolution spatiale $\epsilon > 0$ définie par

$$osc_\delta z(t) < \epsilon, \quad \forall t \in D_z. \quad (169)$$

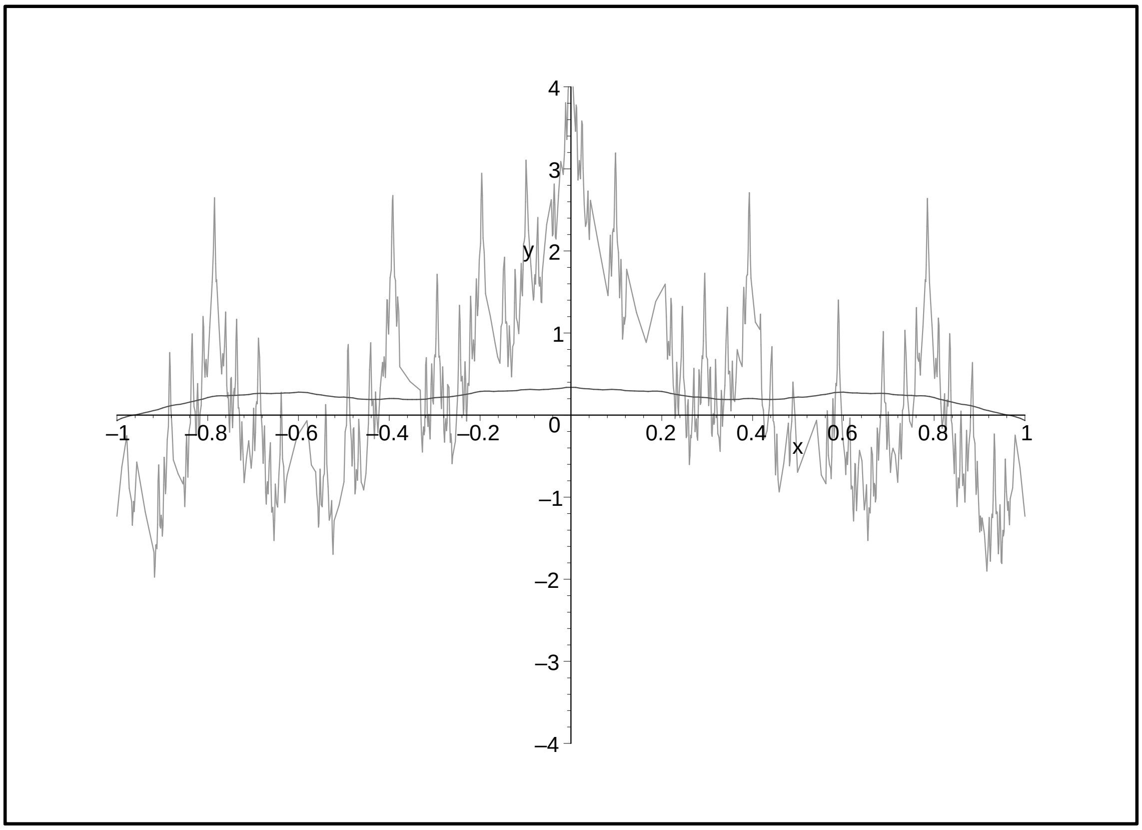

Figure 4: Fonction de Weierstrass pour $q = 2$, $\alpha = 0.2$ et sa représentation moyenne pour $\delta = 1$

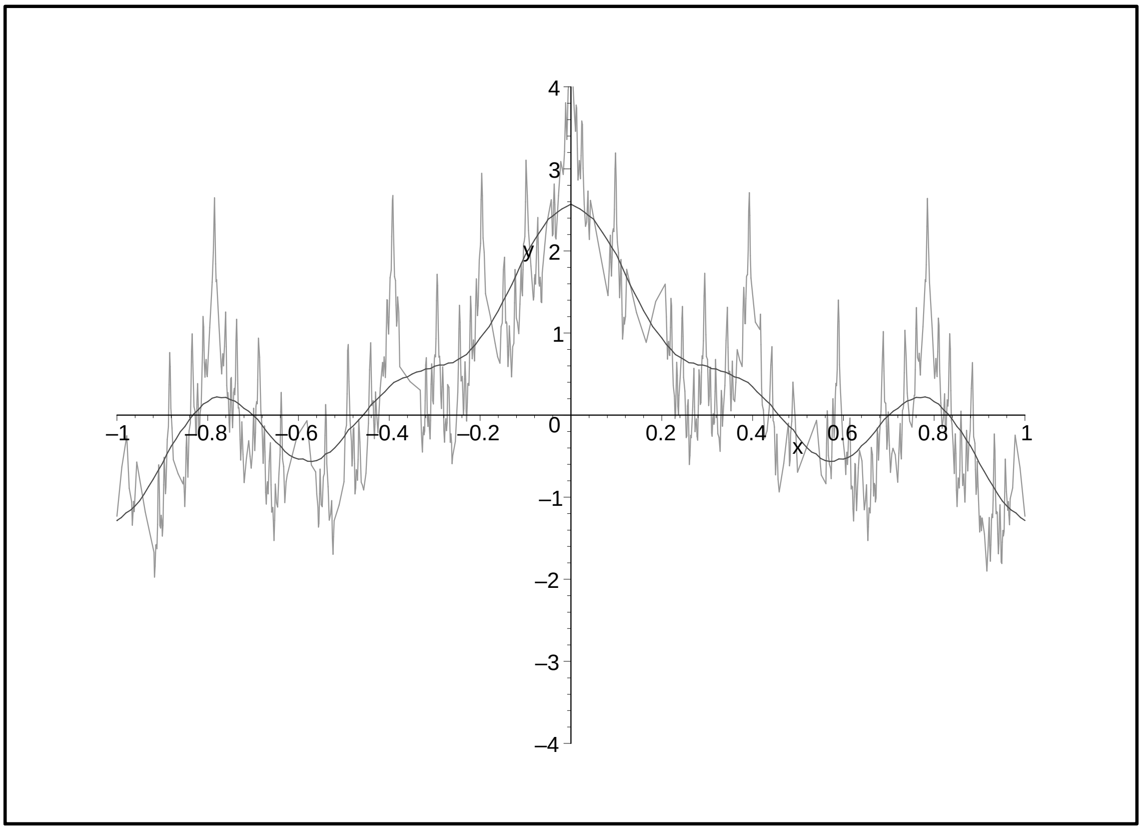

Figure 5: Fonction de Weierstrass pour $q = 2$, $\alpha = 0.2$ et sa représentation moyenne pour $\delta = 0.1$

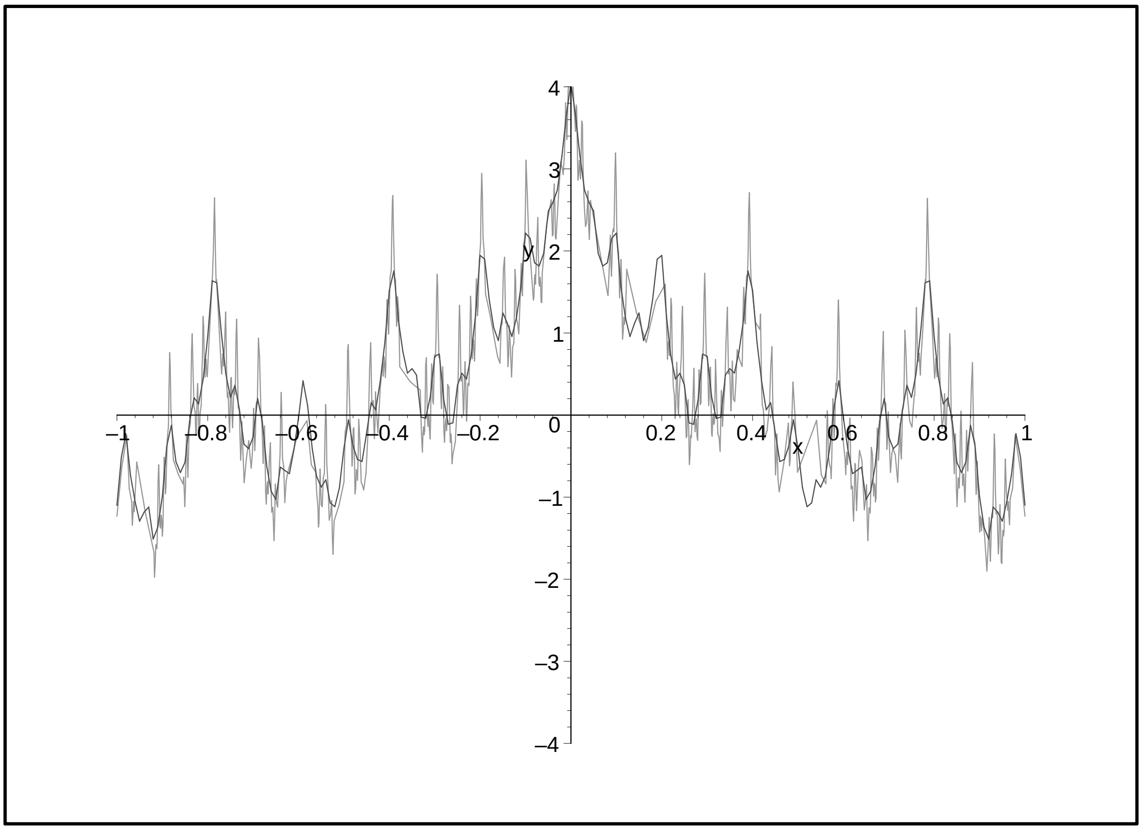

Figure 6: Fonction de Weierstrass pour $q = 2$, $\alpha = 0.2$ et sa représentation moyenne pour $\delta = 0.01$

En physique, les résolutions ϵ et δ sont connues et dépendent du problème considéré. Le critère de moyennisation 9.1 peut se traduire par la condition suivante sur les résolutions:

Critère de δ-moyennisation. *Soient $z(t)$ une fonction, $\delta > 0$ une résolution temporelle, $\bar{z}_\delta$ sa δ-moyennisation et $\epsilon(\delta)$ sa résolution spatiale associée. On dira que $\bar{z}_\delta(t)$ représente bien $z(t)$ si*

$$\frac{\epsilon(\delta)}{\delta} = O(1). \tag{M}$$

Nous avons alors le théorème fondamental suivant:

Théorème 9.1. *Soint $z(t) \in C^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $\delta > 0$, alors sa δ-moyennisation $\bar{z}_\delta(t)$ représente bien $z(t)$ si et seulement si $\delta > \delta_0$.*

Démonstration. Comme $z(t)$ est de classe C^α, on a

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{osc_\delta z(t)}{\delta} = +\infty. \tag{170}$$

Supposons que $\bar{z}_\delta(t)$ représente bien $z(t)$, alors

$$\frac{osc_\delta z(t)}{\delta} < \frac{\epsilon(\delta)}{\delta} = O(1). \tag{171}$$

Par (170), l'inégalité (171) n'est vérifiée que si $\delta > \delta_0$, dépendant de la fonction z choisie. □

9.2. Loi d'échelle et résolution minimale. On peut interpréter l'existence de la résolution minimale en utilisant la loi d'échelle satisfaite par les fonctions moyennes.

Lemme 9.3. *Soit $z \in C^\alpha$ dont le reste dans le développement de Taylor est dérivable, $\bar{z}_\delta$ sa δ-moyennisation et $L(\bar{z}_\delta)$ la longueur du graphe de $\bar{z}_\delta$. On a*

$$\frac{dL(\bar{z}_\delta)}{d\log\delta} = a + bL(\bar{z}_\delta) + O(L(\bar{z}_\delta)^2), \tag{172}$$

où $a = 0$, $b = \alpha - 1$.

Démonstration. On a

$$\bar{z}'_\delta(t) = \frac{1}{2\delta}(f(t+\delta) - f(t-\delta)). \tag{173}$$

On a donc

$$L(\bar{z}_\delta) = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{1}{4\delta^2}(f(t+\delta) - f(t-\delta))^2} dt. \tag{174}$$

Pour δ suffisamment petit, on a

$$\begin{array}{rcl} f(t+\delta) & = & f(t) + \delta^\alpha d_+^\alpha f(t) + R_+(t,\delta), \\ f(t-\delta) & = & f(t) - \delta^\alpha d_-^\alpha f(t) + R_-(t,\delta), \end{array} \tag{175}$$

avec

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{R_\sigma(t,\delta)}{\delta^\alpha} = 0, \quad \sigma = \pm. \tag{176}$$

On en déduit

$$f(t+\delta) - f(t-\delta) = \delta^\alpha a_\alpha(t) + r(t,\delta), \tag{177}$$

où $a_\alpha(t) = d_+^\alpha f(t) + d_-^\alpha f(t)$, $r(t,\delta) = R_+(t,\delta) - R_-(t,\delta)$.

En remplacant $f(t+\delta) - f(t-\delta)$ par son expression dans (174), on obtient

$$L(\bar{Z}_\delta) = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{\delta^{2(\alpha-1)}}{4}(a(t) + \frac{r(t,\delta)}{\delta^\alpha})^2} dt. \tag{178}$$

On suppose r dérivable par rapport à δ, alors $r(t,\delta) = r(t,0) + \delta \frac{dr}{d\delta}(t,0) + R(t,\delta)$, avec $\lim_{\delta \to 0} \frac{R(t,\delta)}{\delta} = 0$ et $r(t,0) = 0$.

En dérivant (178), on a donc

$$\frac{dL(\bar{z}_\delta)}{d\delta} = (\alpha - 1)\frac{1}{\delta} L(\bar{z}_\delta) + \delta^{\alpha-1} \int_a^b \frac{2(1-\alpha)\delta^{1-2\alpha} + \beta(t,\delta)}{\sqrt{\delta^{2(1-\alpha)} + \frac{1}{4}(a_\alpha(t) + \frac{r(t,\delta)}{\delta^\alpha})^2}} dt, \tag{179}$$

où

$$\beta(t,\delta) = \frac{1}{2}(\delta^{2(1-\alpha)} + \frac{1}{4}(a_\alpha(t) + \frac{r(t,\delta)}{\delta^\alpha})\frac{\frac{dr}{d\delta}\delta^\alpha - r(t,\delta)\alpha\delta^{\alpha-1}}{\delta^{2\alpha}}. \tag{180}$$

Par hypothèse, on a

$$\lim_{\delta \to 0} \delta \frac{\frac{dr}{d\delta}\delta^\alpha - r(t,\delta)\alpha\delta^{\alpha-1}}{\delta^{2\alpha}} = 0. \tag{181}$$

On pose $\tau = \log \delta$. Alors

$$\frac{dL(\bar{z}_\delta)}{d\tau} = \frac{dL(\bar{z}_\delta)}{d\delta}\delta. \tag{182}$$

On déduit de (180),

$$\frac{dL(\bar{z}_\delta)}{d\tau} = (\alpha - 1)L(\bar{z}_\delta) + R(t,\delta). \tag{183}$$

En utilisant (181), on montre que

$$R(t,\delta) = O(L^2(\bar{z}_\delta)). \tag{184}$$

On en déduit le résultat. □

III. Vers une notion de variété fractale

La théorie de la relativité d'échelle développée par Nottale ([N1],[N2]) étend le principe de relativité d'Einstein aux transformations d'échelle des résolutions. Elle est basée sur l'hypothèse d'un espace-temps appelé *fractal* dans la littérature.

De nombreuses conséquences physiques découlent de cette structure géométrique. Notamment, cela implique l'existence d'une infinité de géodésiques entre deux points donnés de l'espace et qui sont des courbes fractales elles aussi. Du point de vue physique, on est conduit à une description statistique, non déterministe des trajectoires.

Le terme fractal utilisé par Nottale n'est pas défini rigoureusement et peut prêter à confusion. Il sous-entend l'apparition de structure à toutes les échelles d'observation. Quelquefois, il parle d'abandonner l'hypothèse de différentiabilité, implicite dans les travaux d'Einstein utilisant des variétés Riemanniennes.

Une remarque tout d'abord: si on suppose que l'espace temps est une variété topologique (ce qui n'est pas a priori remis en cause), alors on sait que jusqu'à la dimension 3, ces variétés possèdent toujours une structure lisse et que celle-ci est unique (Moïse, 1950)[1].

Pourtant, il est clair que certaines variétés de dimension 3 ont bel et bien une structure fractale. Ce n'est pas dans le fait de possèder ou non une structure différentiable qu'il faut chercher l'aspect fractal. Autrement dit, il ne faut pas parler de "perte" de différentiabilité de la structure de la variété.

L'information sur la structure fractale de la variété est à chercher du coté de la capacité de l'espace tangent à résumer la structure locale de la variété. C'est donc, sur l'ensemble des fonctions différentiables admises sur la variété qu'il faut chercher une caractérisation de la fractalité.

Dans ce chapitre, nous donnons une première notion de variété fractale. On démontre notamment, un analogue de la notion de géodésique entre deux points étant défini, qu'il existe une infinité de géodésiques reliant deux points de la variété.

[1] A partir de la dimension 4, c'est plus compliqué et certaines variétés ne possèdent pas de structure lisse (Freedman, 1981), d'autres en possèdent plusieurs.

1. VARIÉTÉS FRACTALES

1.1. Variétés topologiques. On renvoie à [He] pour une introduction au sujet.

Définition 1.1. *Une variété topologique $\mathcal{F}$ est un espace topologique séparé tel que tout point possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

Autrement dit, pour tout $p \in \mathcal{F}$, il existe un voisinage ouvert $V(p)$ de p, et il existe $n \in \mathbb{N}$ et un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ tels que $V(p)$ et U soient homéomorphes. Soit ϕ l'homéomorphisme de $V(p)$ sur U, alors $(V(p), \phi)$ est une carte locale de $\mathcal{F}$ en p.

Nous renvoyons à [He] pour les propriétés classiques des variétés topologiques (compacité et connexité locale).

Toutes les variétés sont supposées connexes par la suite. Ceci nous permet de définir correctement la dimension d'une variété comme la valeur de n obtenue pour une carte locale (cette valeur étant constante sur toute composante connexe).

1.2. Variétés différentiables. Soit $\mathcal{F}$ une variété topologique.

Définition 1.2. *On appelle atlas de $\mathcal{F}$ une famille $\mathcal{A} = (\Omega_i, \phi_i)_{i\in I}$ de cartes locales telles que $\mathcal{F} = \bigcup_{i\in I} \Omega_i$.*

Les applications $\phi_{i,j} = \phi_j \circ \phi_i : \phi_i(\Omega_i \cap \Omega_j) \to \phi_j(\Omega_i \cap \Omega_j)$ sont les changements de cartes de l'atlas $\mathcal{A}$.

On dira qu'un atlas est de classe C^k, $k \in \mathbb{N}^*$, si les applications $\phi_{i,j}$ sont de classe C^k.

Définition 1.3. *Deux atlas de classe C^k, $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$, sont C^k compatibles si $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ est encore un atlas de classe C^k.*

La relation de C^k-compatibilité est une relation d'équivalence sur l'ensemble des atlas de classe C^k de $\mathcal{F}$. La réunion des atlas d'une classe d'équivalence est aussi appelée un C^k-atlas *saturé* (ou complet).

1.3. Variété fractale. La notion intuitive d'objet fractal fait penser que les variétés topologiques que nous devons considérer ne possèdent pas de structure différentiable. Nous allons voir qu'il n'en est rien. On construit une famille de variétés différentiables, qui méritent le nom de variétés fractales, et qui pourtant sont différentiables. La différence essentielle entre une variété fractale et les variétés usuelles en analyse, tient à la non existence (mis à part des fonctions “triviales”) de fonctions différentiables sur cette variété.

1.3.1. Propotypes de variétés fractales. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^α (la fonction de Weierstrass pour fixer les idées). Soit S_1^α l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ définis par

$$x^2 + y^2 = 1 + \frac{f(\dfrac{x}{x^2+y^2})}{m}, \tag{185}$$

où

$$m = \max_{\phi \in [0,2\pi]} \mid f(\cos\phi) \mid +1. \tag{186}$$

En coordonnées polaires, notées (r, θ), cet ensemble est défini par

$$r^2 = 1 + \frac{f(\cos\theta)}{m}. \tag{187}$$

Soit $\pi : S_1^\alpha \to S^1$ défini par $(r,\theta) \mapsto (1,\theta)$. C'est un homéomorphisme, et $\pi^{-1} : S^1 \to S_1^\alpha$ est défini par $(1,\theta) \to (\sqrt{1 + \dfrac{f(\cos\theta)}{m}}, \theta)$.

On a donc S_1^α homéomorphe au cercle S^1. On note $P = (0,1)$ et $Q = (0,-1)$ deux points de S^1. On définit $U_1 = S^1 \setminus \{P\}$ et $U_2 = S^1 \setminus \{Q\}$. La projection stéréographique ϕ_1 de pôle P s'obtient en associant à $x \in U_1$ l'intersection de la droite $y = 0$ avec la droite passant par P et x. De la même façon, on définit la projection stéréographique ϕ_2 de pôle Q. On a

$$\begin{aligned} \phi_1(x,y) &= \left(\frac{x}{1-y}\right), \\ \phi_2(x,y) &= \left(\frac{x}{1+y}\right). \end{aligned} \tag{188}$$

On vérifie que ϕ_1 (resp. ϕ_2) est un homéomorphisme de U_1 (resp. U_2) sur $\mathbb{R}$, et que

$$\begin{aligned} \phi_1^{-1}(x) &= \left(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{x^2-1}{1+x^2}\right), \\ \phi_2^{-1}(x) &= \left(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2}\right). \end{aligned} \tag{189}$$

Soit $\mathcal{A} = \{(U_1,\phi_1),\ (U_2,\phi_2)\}$ l'atlas de classe C^∞ ainsi défini sur le cercle. On a le lemme suivant

Lemme 1.1. *La variété S_1^α est une variété différentiable de classe C^∞.*

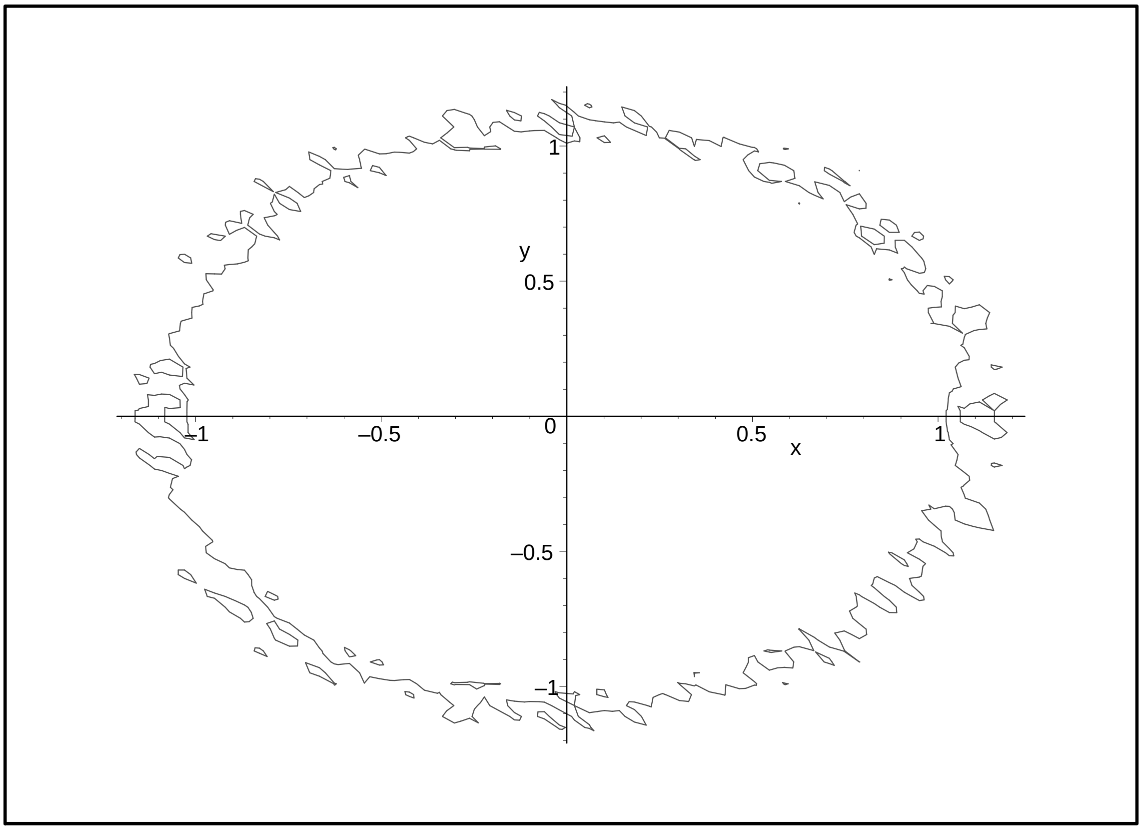

Figure 7: Cercle de Weierstrass S_1^α avec $\alpha = 0.2$, $q = 6$

Démonstration. On la munit de l'atlas $\mathcal{A} = \{(V_1, \psi_1),\ (V_2, \psi_2)\}$ défini par $V_i = \pi^{-1}(U_i)$, $\psi_i = \phi_i \circ \pi$, $i = 1, 2$. Les changements de cartes sont définis par $\Psi_{i,j} = \Psi_j \circ \Psi_i^{-1} = \phi_j \circ \phi_i$, $i, j \in \{1, 2\}$, qui sont de classe C^∞. $\square$

Pourtant, un rapide coup d'oeil à la forme de S_1^α (dans la figure, on a utilisé pour f la fonction de Weierstrass (chap.1,§.3.3.1) avec $\alpha = 0.2$ et $q = 6$) nous dit que cet objet "doit" être une variété fractionnaire. La différence essentielle entre S^1 et S_1^α tient à la classe des fonctions admissibles sur S_1^α.

Soit $g : S_1^\alpha \to \mathbb{R}$ une fonction sur S_1^α et (V_1, ψ_1) une carte locale sur S_1^α. On définit la régularité de g comme celle de $G = g \circ \psi_1^{-1}$. On a $\psi_1^{-1} = \pi^{-1} \circ \phi_1^{-1}$, d'où $G = g \circ \pi^{-1} \circ \phi_1^{-1}$. On a

$$\phi_1^{-1}(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{t^2 - 1}{1+t^2} \right), \tag{190}$$

en coordonnées cartésiennes dans $\mathbb{R}^2$. On a

$$\pi^{-1}(x, y) = (r(x, y)x, r(x, y)y), \tag{191}$$

avec

$$r(x,y) = \sqrt{1 + \frac{f(x)}{m}}. \tag{192}$$

On en déduit

$$\psi_1^{-1} = \pi^{-1} \circ \phi_1^{-1} = r(t) \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{t^2-1}{1+t^2} \right), \tag{193}$$

avec

$$r(t) = \sqrt{1 + \frac{f(2t/1+t^2)}{m}}. \tag{194}$$

On a $G(t) = g \circ \psi_1^{-1}(t)$. Cette fonction est différentiable si et seulement si g est de la forme $\tilde{g} \circ \pi$ avec $\tilde{g} : S^1 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable de S^1. On appelle *fonctions triviales* ce type de fonctions différentiables sur S_1^α. On a donc

Lemme 1.2. *Les seules fonctions différentiables définies sur S_1^α sont les fonctions triviales.*

Ce lemme a d'importantes implications, notamment en ce qui concerne l'espace tangent. L'espace tangent que l'on peut définir sur S_1^α est en fait celui induit par l'espace tangent sur le cercle S^1. On a donc aucune information sur la structure locale de S_1^α.

Les résultats précédents s'étendent à toute une famille de variétés différentiables. On définit S_2^α de manière analogue à S_1^α (on peut aisément généraliser cette définition à la dimension n et définir les S_n^α).

Soit $(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R} \times S^1 \times S^1$ les coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$. On définit S_2^α par

$$r^2 = 1 + \frac{f(\cos\theta\cos\phi)}{M}, \tag{195}$$

où

$$M = \max_{\theta,\phi\in[0,2\pi]} f(\cos\theta\cos\phi). \tag{196}$$

On renvoie à ([He], p. 4-5) pour la définition d'un atlas de classe C^∞ sur S^2 (resp. S^n). On a, de façon analogue au cas de S_1^α,

Théorème 1.1. *La variété S_2^α est de classe C^∞. Les seules fonctions différentiables sur S_2^α sont les fonctions triviales.*

Exemple de S_2^α: Dans les figures qui suivent, on a choisi pour f la fonction de Weierstrass (voir §.3.3.1, chap.1) avec $\alpha = 0.3$, $q = 2$. On donne la forme de S_2^α

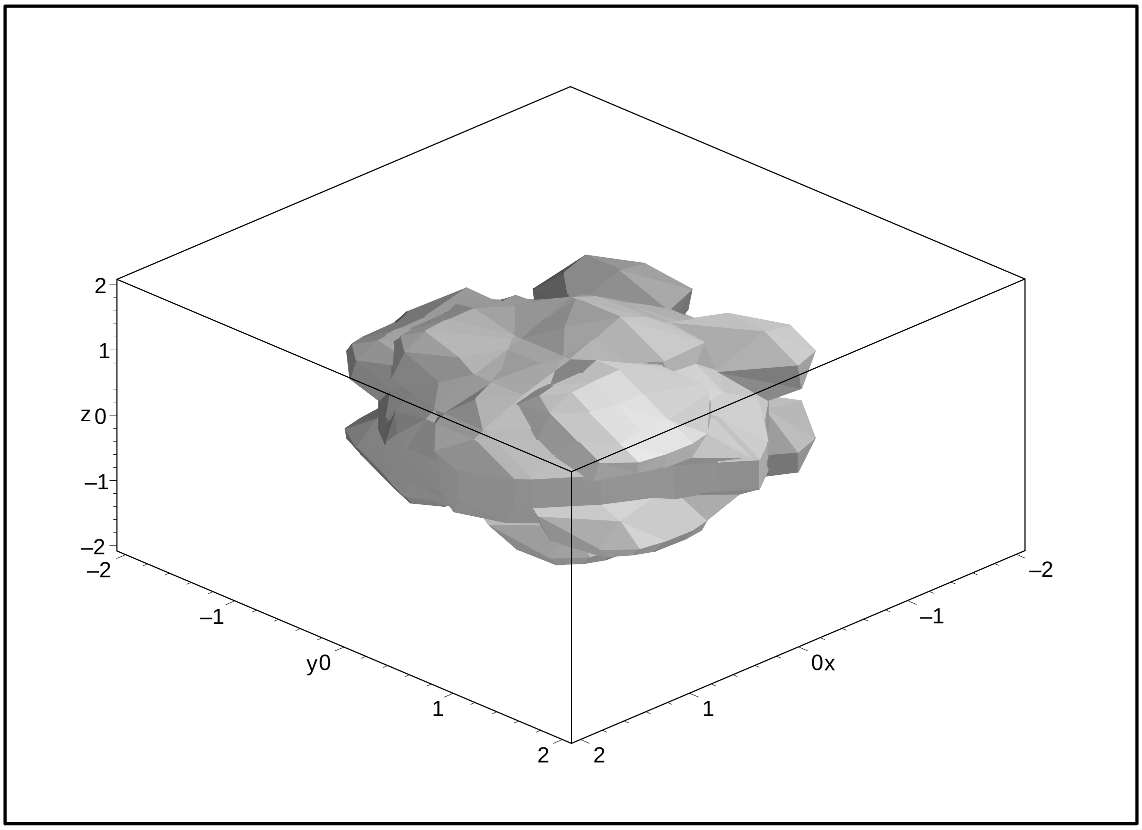

Figure 8: Sphère de Weierstrass S_2^α, avec $\alpha = 0.3$, $q = 2$ et $\epsilon = 1/10$.

pour une résolution (notée ϵ dans les légendes) de plus en plus fine. Ces variétés sont appelées sphères de Weierstrass.

1.3.2. Variétés fractales. Les exemples précédents nous conduisent à la définition suivante des variétés fractales:

Soit V et W deux variétés différentiables et $h : V \to W$ un homéomorphisme. Soit (W_i, ϕ_i), $i \in I$ un atlas de W de classe C^k. Alors $(h^{-1}(W_i), \phi_i \circ h)$ est un atlas de classe C^k de V.

On définit l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans V différentiables "triviales" :

Définition 1.4. *Soit $f : \mathbb{R} \to V$ une application différentiable de V. On dit qu'elle est triviale si il existe une application différentiable $g : \mathbb{R} \to W$ telle que $f = h^{-1} \circ g$.*

On a alors

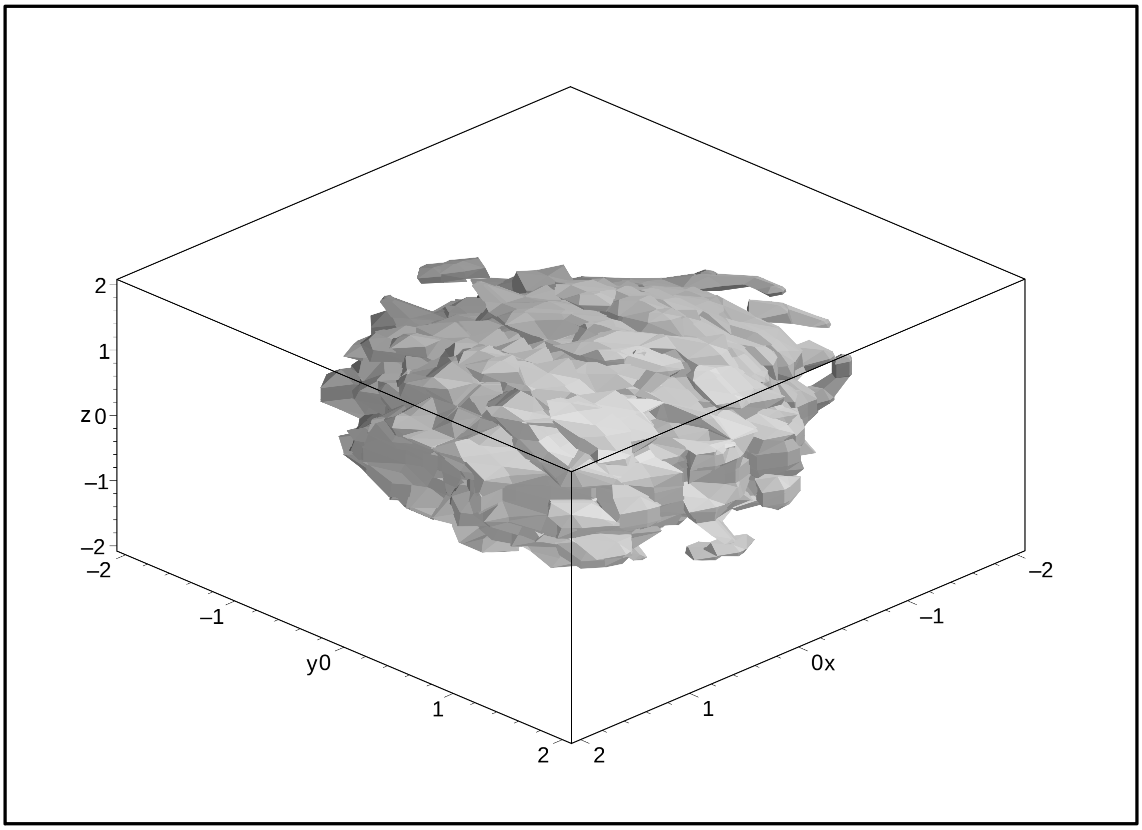

Figure 9: Sphère de Weierstrass S_2^α, avec $\alpha = 0.3$, $q = 2$ et $\epsilon = 1/20$.

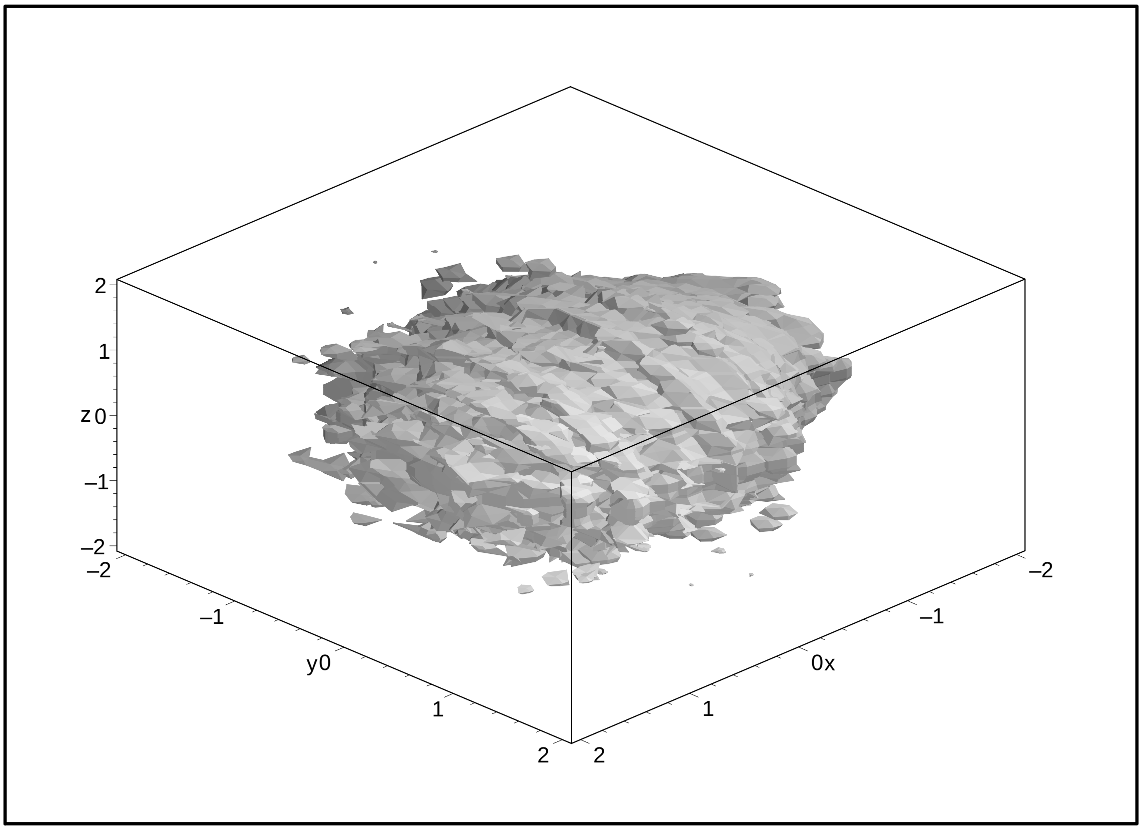

Figure 10: Sphère de Weierstrass S_2^α, avec $\alpha = 0.3$, $q = 2$ et $\epsilon = 1/30$.

Définition 1.5. *Soit V une variété. On dit que V est une variété fractale si*

i) il existe une variété différentiable W et un homéomorphisme $h : V \to W$,

ii) il n'existe pas d'applications de $\mathbb{R}$ dans V différentiables hormis les applications différentiables triviales définies pas W.

Dans les exemples précédents, nous avons $W = S^1$ et $W = S^2$.

Les variétés S_n^α sont évidemment des variétés fractionnaires. Notons que pour le moment, nous ne distinguons pas les variétés S_2^α et S_2^β où $\alpha \neq \beta$. Pour ce faire, nous introduisons la notion de variété fractale d'ordre α, $0 < \alpha < 1$.

Définition 1.6. *Une variété fractale V sera dite d'ordre α, $0 < \alpha < 1$ si les fonctions sur V sont au plus de classe $\mathcal{C}^\alpha$.*

Avec cette définition, il est facile de voir que S_2^α est une variété fractale d'ordre α, alors que S_2^β est une variété fractale d'ordre β.

Remarque. Cette définition n'a de sens que si α est une constante, c'est à dire pour les variétés fractales uniformes. Ce n'est pas toujours le cas. Par exemple, on peut définir les sphères de Riemann $S_2^{\alpha(x)}$ en prenant pour f la fonction de Riemann (voir les figures dans l'appendice 1).

Convention. Afin d'alléger la suite de ce texte, nous convenons d'abréger "variété fractale d'ordre α" en *α-variété*. On notera V_n une variété de dimension (topologique) n.

Remarque. Les *chemins* sur une α-variété sont donc de classe $\mathcal{C}^\alpha$ (si ils ne sont pas donnés par un chemin trivial, c'est à dire associés à une fonction triviale).

1.4. Applications α-dérivables. Soient V_n une α-variété et W_m une β-variété et $f : V_n \to W_m$ une application continue.

Définition 1.6. *Si $\gamma \leq inf(\alpha, \beta)$, f est dite de classe C^γ sur V_n si $\forall M \in V_n$, $\forall(\Omega, \phi)$, $(\tilde{\Omega}, \psi)$ respectivement carte de V_n en M et carte de W_m en $f(M)$ vérifiant $f(\Omega) \subset \tilde{\Omega}$ alors $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(\Omega) \to \phi(\tilde{\Omega})$ est de classe C^γ.*

2. STRUCTURE "TANGENTE" DES VARIÉTÉS FRACTALES

Par définition même des variétés fractales, il n'est pas possible de définir un espace tangent puisque la définition classique de vecteur tangent ne tient plus. La généralisation de cette structure fait intervenir la notion de α-dérivée définie au chapitre 1. On montre alors que l'espace tangent est un espace vectoriel de dimension $2n$ si la variété est de dimension (topologique) n.

2.1. Fonctions plates et vecteurs tangents. Soit V une α-variété et x un point de V. On note $\mathcal{F}_x$ l'espace vectoriel des fonctions $f : V \to \mathbb{R}$ qui sont α-dérivables au point x.

Définition 2.1. *Soient $P \in V$ et f_1, f_2 deux applications de classe C^α, d'un voisinage de 0 (dans $\mathbb{R}$) dans V, telles que $f_1(0) = f_2(0) = P$.*

Etant donnée une carte locale (Ω, ϕ) avec $P \in \Omega$, on dira que $f_1 \sim f_2$ si $\phi \circ f_1$ et $\phi \circ f_2$ ont même α-dérivée en zéro.

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence R qui ne dépend pas de la carte locale. En effet, on a

$$(\psi \circ f_1)^{(\alpha)}(0) = (\psi \circ \phi^{-1})'(\phi(P)).(\phi \circ f_1)^{(\alpha)}(0). \tag{197}$$

Définition 2.2. *Un vecteur tangent en P à V_n est une classe d'équivalence pour R.*

Une autre définition fait intervenir les fonctions plates.

Définition 2.3. *Une fonction α-dérivable f de V_n dans $\mathbb{R}$ est dite plate en P si, (Ω, ϕ) désignant une carte locale en P,*

$$(f \circ \phi^{-1})^{(\alpha)}(\phi(P)) = 0. \tag{198}$$

C'est une définition intrinsèque (ne dépend pas du choix de la carte locale). En effet, on a

$$(f \circ \psi^{-1})^{(\alpha)}(\psi(P)) = (f \circ \phi^{-1})^{(\alpha)}(\phi(P)) \circ (\phi \circ \psi^{-1})'(\psi(P)). \tag{199}$$

Définition 2.4. *Un vecteur tangent en P à V_n est une forme linéaire X sur l'espace des fonctions numériques α-dérivables sur V_n, dont le noyau contient le sous espace des fonctions plates en P.*

Une proposition importante est:

Proposition 2.5. *$X(fg) = f(P)X(g) + g(P)X(f)$.*

Démonstration. La fonction $(f - f(P))(g - g(P))$ est plate en P. En effet, on a

$$\begin{aligned}((f\circ\phi^{-1} - f(P))(g\circ\phi^{-1} - g(P)))^\alpha &= (f\circ\phi^{-1})^\alpha(\phi(P)).(g(P) - g(P)) \\ &\quad + (f(P) - f(P)).(g\circ\phi^{-1})^\alpha = 0.\end{aligned} \tag{200}$$

On a donc $X((f - f(P))(g - g(P))) = 0$ par définition. Par ailleurs, on a

$$X((f - f(P))(g - g(P))) = X(fg) - f(P).X(g) - g(P).X(f) + f(P)g(P).X(1).$$

On a $X(1) = 0$, d'où le résultat. □

2.2. Espace tangent. On définit maintenant l'analogue du plan tangent.

Définition 2.6. *Le plan tangent en P à V_n, noté $T_P(V_n)$, est l'ensemble des vecteurs tangents en P à V_n.*

Comme dans le cas classique, un plan tangent en un point a une structure d'espace vectoriel.

Proposition 2.1. *$T_P(V_n)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2n ; de plus, (Ω, ϕ) désignant une carte en P de coordonnées associées $(x^1, \dots, x^n)$, les $\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$, $\dfrac{\partial}{\partial \bar{x}^\alpha}$, $i = 1, \dots, n$ forment une base de $T_P(V_n)$ où*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\right)_P (f) + i\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i^\alpha}\right)_P (f) = \partial_i^\alpha(f\circ\phi^{-1})(\phi(P)). \tag{201}$$

On note $\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha} + i\dfrac{\partial}{\partial \bar{x}^\alpha}$, les n vecteurs tangents (complexes) de $T_x(V)$ définis pour tout $i = 1, \dots, n$ par : $\forall f \in \mathcal{F}_x$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\right)_x (f) + i\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i^\alpha}\right)_x (f) = (\partial_i^\alpha(f\circ\phi^{-1}))(\phi(x)), \tag{202}$$

où $(D_i(f\circ\phi^{-1}))(\phi(x))$ désigne la ième dérivée partielle de $f\circ\phi^{-1}$ au point $\phi(x)$.

Pour tout $X \in T_x(V)$, il existe des uniques $X^1, \dots X^n$, $\bar{X}^1, \dots, \bar{X}^n$ dans $\mathbb{C}$ tels que

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \left(\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\right)_x + i\bar{X}^i\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i^\alpha}\right)_x. \tag{203}$$

Les X^i, $\bar{X}^i$ sont appelés coordonnées de X dans la carte (Ω, ϕ), et pour tout $i = 1, \dots, n$, on a

$$X^i + i\bar{X}^i = X(\phi^i), \tag{204}$$

où ϕ^i est la ième composante de ϕ.

Soient maintenant (Ω, ϕ) et (Ω', ψ) deux cartes de V au point x de coordonnées respectives $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$. Pour tous $i, j = 1, \ldots, n$, on note

$$\left(\frac{\partial x^j}{\partial y_i^\alpha}\right)_x + i\left(\frac{\partial x^j}{\partial \bar{y}_i^\alpha}\right)_x = \left(\frac{\partial}{\partial y_i^\alpha}\right)_x (\phi^j) + i\left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}_i^\alpha}\right)_x (\phi^j) = \partial_i^\alpha(\phi^j \circ \phi^{-1})(\phi(x)). \quad (205)$$

Par définition, $\left(\frac{\partial x^j}{\partial y_i^\alpha}\right)_x + i\left(\frac{\partial x^j}{\partial \bar{y}_i^\alpha}\right)_x$ est la ième dérivée partielle de $\phi^j \circ \psi^{-1}$ au point $\psi(x)$, et pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_i^\alpha}\right)_x = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial x^j}{\partial y_i^\alpha}\right)_x \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i^\alpha}\right)_x . \quad (206)$$

2.3. Le fibré tangent. Soit V une α-variété de dimension n. Par définition, le fibré tangent de V, noté $T(V)$, est la réunion (disjointe) des espaces tangents $T_x(V)$, $x \in V$.

On écrit

$$T(V) = \bigcup_{x \in V} T_x(V). \quad (207)$$

Soit $\mathcal{A}$ un atlas de V. A toute carte (Ω, ϕ) de $\mathcal{A}$, on associe l'application

$$\Phi : \bigcup_{x \in \Omega} T_x(V) \to \phi(\Omega) \times \mathbb{R}^{2n}, \quad (208)$$

définie par : si $x \in \Omega$ a pour coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la carte (Ω, ϕ), et si $X \in T_x(V)$ a pour coordonnées $(X^1 + i\bar{X}^1, \ldots, X^n + i\bar{X}^n)$ dans la carte (Ω, ϕ), alors

$$\Phi(X) = (x_1, \ldots, x_n, X^1, \ldots, X^n, \bar{X}^1, \ldots, \bar{X}^n). \quad (209)$$

On remarque facilement que Φ réalise une bijection de $\bigcup_{x \in \Omega} T_x(V)$ sur le produit $\phi(\Omega) \times \mathbb{R}^{2n}$.

3. CHAMPS DE VECTEURS ET GROUPE A 1-PARAMÈTRE DE DIFFÉOMORPHISMES

On définit les champs de vecteurs sur une α-variété. On montre que la donnée d'une famille à 1-paramètre de $\mathcal{C}^\alpha$-difféomorphismes définit un champ de vecteur. La réciproque est vraie, mais la famille de difféomorphismes n'est pas unique, contrairement au cas classique.

3.1. Champs de vecteurs. On a la définition suivante

Définition 3.1. *Soit V une α-variété. Un champ de vecteurs sur V de classe $\mathcal{C}^\beta$ (resp. C^k, $k \geq 1$) est une application $X : V \to T(V)$ de classe $\mathcal{C}^\beta$ (resp. C^k) qui vérifie $\Pi \circ X = Id_V$, où $\Pi : T(V) \to V$ est l'application qui à $X \in T_x(V)$ associe $\Pi(X) = x$.*

Autrement dit, à tout $x \in V$ on associe un vecteur tangent à V au point x, et on le fait de façon $\mathcal{C}^\beta$ (on peut aussi considérer des champs différentiables).

Soit V une α-variété et $\gamma : [0,1] \to V$ un chemin de classe $\mathcal{C}^\alpha$. On note $\left(\frac{d\gamma}{dt^\alpha}\right)_t$, le vecteur tangent de $T_{\gamma(t)}V$ défini par : pour toute fonction $f : V \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\alpha$ au point $\gamma(t)$, on a

$$\left(\frac{d\gamma}{dt^\alpha}\right)_t = \frac{d}{dt^{\alpha^2}}(f \circ \gamma)(t). \tag{210}$$

Etant donnée (Ω, ϕ) une carte de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$,

$$\left(\frac{d\gamma}{dt^\alpha}\right)_t = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d\gamma^i}{dt^\alpha}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\right) + i\left(\frac{d\gamma^i}{d\bar{t}^\alpha}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i^\alpha}\right), \tag{211}$$

où les $\gamma^i(t)$ désignent les coordonnées du point $\gamma(t)$ dans la carte.

Soit X un champ de vecteur sur V. Une *courbe intégrale* de X par le point $p \in V$ est une application $\gamma : I \to V$, où I est un intervalle contenant 0, telle que $\gamma(0) = p$ et

$$\frac{d^\alpha \gamma}{dt^\alpha} = X(\gamma(t)), \tag{212}$$

pour tout $t \in I$. L'image de la courbe intégrale est appelée *orbite* ou *trajectoire*.

3.2. Groupe à 1-paramètre. Soient V une α-variété et Ω un voisinage ouvert de $\{0\} \times V \subset \mathbb{R} \times V$ vérifiant $\forall (t, P) \in \Omega$ et $\forall u \in [0,1]$, $(tu, P) \in \Omega$.

Une application $F \in \mathcal{C}^\alpha(\Omega, V)$ est un $\mathcal{C}^\alpha$-groupe à un paramètre de difféomorphismes locaux si

i) $\forall P \in V,\ F(0, P) = P$,

ii) $\forall P \in V$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$, $(s, F(t, P))$, (t, P), $(s + t, P) \in \Omega$, on a

$$F(t + s, P) = F(s, F(t, P)). \tag{213}$$

On a la proposition suivante

Proposition 3.1. *Un $\mathcal{C}^\beta$-groupe à un paramètre de difféomorphismes locaux détermine un $\mathcal{C}^\beta$-champ de vecteurs : on pose*

$$X(P).f = \frac{d^\beta}{dt^\beta}(f \circ F(t,P))_{t=0}. \tag{214}$$

La réciproque est vraie, mais on n'a pas unicité du groupe à un paramètre de difféomorphismes (contrairement au cas classique ([He],p.32)).

N.B. Dans toute la suite, on supposera que sous de bonnes conditions, il existe au moins une solution à une équation différentielle fractionnaire.

Théorème 3.2. *Un $\mathcal{C}^\alpha$-champ de vecteurs sur V compacte détermine une infinité de $\mathcal{C}^\alpha$-groupes à un paramètre de difféomorphismes locaux.*

Démonstration. Soient (Ω, ϕ) une carte locale de V et $P \in \Omega$. On note F la solution du problème de Cauchy fractale

$$\begin{array}{rcl} d^\alpha F^i & = & X^i.\phi^{-1}(F(t)) + i\bar{X}^i.\phi^{-1}(F(t)), \quad \forall i, \\ F(0) & = & \phi^{-1}(P). \end{array} \tag{215}$$

On a par (I,théorème 6.2) l'existence d'une infinité de solutions.

D'après le N.B, on a existence d'une solution à l'équation différentielle. Cette solution $F(t)$ est définie sur un intervalle $]a,b[$. On dit que F est *maximale* si pour tout intervalle J contenant I, F ne se prolonge pas à J. Nous allons montrer que si F est maximale alors $b = +\infty$. Supposons que $b \neq \infty$. Comme V est supposée compacte, on peut prendre une suite $t_n \to b$, $t_n \in]a,b[$ telle que $F(t_n)$ converge vers un $q \in V$. Soit $\gamma :]-\epsilon,\epsilon[\times \mathcal{V}_q \to V$ le flot local de X en q. Soit n_0 tel que $b - t_{n_0} < \epsilon/2$ et $F(t_{n_0}) \in \mathcal{V}_q$. On définit $\beta :]a, t_{n_0}+\epsilon[\to V$ telle que $\beta(t) = F(t)$ si $t \leq t_{n_0}$ et $\beta(t) = \gamma(t - t_{n_0}, F(t_{n_0}))$ si $t \geq t_{n_0}$. Alors β est une courbe intégrale de X, ce qui est une contradiction car $]a,b] \subset]a, t_{n_0}+\epsilon[$. On montre de même que $a = -\infty$. Il existe par conséquent une courbe intégrale de X définie sur $\mathbb{R}$.

On fait maintenant le raisonnement dans $\mathcal{C}^\alpha/\mathcal{R}$ afin d'avoir unicité des solutions de l'équation différentielle. On définit $\phi(t,p) = F(t)$. On a $\phi(0,p) = p$ par définition et

$$\frac{\partial \phi(t,p)}{\partial t^\alpha} = X(\phi(t,p)), \tag{216}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ par définition.

On a de plus

$$\phi(t+s,p) = \phi(t,\phi(s,p)), \tag{217}$$

pour $t, s \in \mathbb{R}$ et $p \in V$. Comme $\beta(t) = \phi(t+s,p)$ et $\gamma(t) = \phi(t,\phi(s,p))$ sont deux courbes intégrales de X telles que $\beta(0) = \gamma(0) = \phi(s,p)$, on a (217), par unicité des solutions dans $\mathcal{C}^\alpha/\mathcal{R}$. $\square$

4. CONNEXIONS LINÉAIRES ET GÉODÉSIQUES

Il est possible de définir un analogue des connexions linéaires sur les champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^\alpha$. Les géodésiques d'une variété Riemannienne sont données par une équation faisant intervenir la connexion de Levi-Civita, naturellement associée à la structure Riemannienne de la variété. En supposant que la notion de géodésique sur une α-variété provienne aussi d'une connexion linéaire, on démontre qu'entre deux points, il y en a nécessairement une infinité. Ce résultat confirme l'hypothèse de Nottale suivant laquelle sur un espace fractal il existe une infinité de "géodésiques", conduisant à une étude statistique des trajectoires.

4.1. Connexions linéaires. Soit V une α-variété. On note $\Gamma(V)$ l'espace des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^\alpha$ sur V.

Définition 4.1. *Une connexion sur V est une application $D : T(V) \times \Gamma(V) \to T(V)$ qui vérifie*

(i) $\forall x \in V$, si $X \in T_x(V)$ et $Y \in \Gamma(V)$, alors $D(X,Y) \in T_x(V)$,

(ii) $\forall x \in V$, D restreinte à $T_x(V) \times \Gamma(V)$ est bilinéaire,

(iii) $\forall x \in V$, $\forall X \in T_x(V)$, $\forall Y \in \Gamma(V)$, si $f : V \to \mathbb{R}$ est α-dérivable, alors

$$D(X, fY) = X(f)Y(x) + f(x)D(X,Y). \tag{218}$$

(iv) $\forall X, Y \in \Gamma(V)$, et $\forall k \in \mathbb{N}$, si X et Y sont respectivement de classe $\mathcal{C}^\alpha$ et $\mathcal{C}^\beta$ sur V, avec $\beta > \alpha$, alors $D(X,Y)$ est de classe $\mathcal{C}^\alpha$ sur V, où $D(X,Y)$ est le champ de vecteurs sur V défini pour tout x de V par la relation

$$D(X,Y)(x) = D(X(x), Y). \tag{219}$$

Etant donnée D une connexion, on note généralement $D_X(Y)$ au lieu de $D(X,Y)$. $D_X(Y)$ est appelée *dérivée covariante* de Y par rapport à X.

Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on note

$$
\begin{aligned}
\Delta_i &= D_{\left(\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\right)}, \\
\bar{\Delta}_i &= D_{\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i^\alpha}\right)}.
\end{aligned} \tag{220}
$$

Pour tous $i, j = 1, \ldots, n$, $\Delta_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$, qui est défini en tout point x de Ω par

$$
\Delta_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(x) = D(\left(\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\right)_x, \left(\frac{\partial}{\partial x_j^\alpha}\right)), \tag{221}
$$

est alors un $\mathcal{C}^\alpha$ champ de vecteurs sur Ω (une définition analogue pour $\bar{\Delta}_i$).

On a par définition

$$
D\left(\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j^\alpha}\right) = 0, \quad \forall i, j. \tag{222}
$$

On note $\Gamma_{i,j}^k : \Omega \to \mathbb{R}$ ses fonctions coordonnées dans la carte (Ω, ϕ). Elles sont de classe $\mathcal{C}^\alpha$ et définies par le fait que pour tout $x \in \Omega$ et tous $i, j = 1, \ldots, n$,

$$
\Delta_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j^\alpha}\right)(x) = \Gamma_{ij}^k(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_k^\alpha}\right)_x, \tag{223}
$$

et

$$
\bar{\Delta}_i \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}_j^\alpha}\right)(x) = \bar{\Gamma}_{ij}^k(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_k^\alpha}\right)_x. \tag{224}
$$

Les Γ_{ij}^k et $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ sont les *symboles de Christoffel* de la connexion D.

Si $X = \sum_{i=1}^n X^i \left(\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\right)_x + \bar{X}^i \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i^\alpha}\right)_x \in T_x(V)$ et $Y = \sum_{i=1}^n Y^i \left(\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\right) + \bar{Y}^i \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i^\alpha}\right) \in \Gamma(\Omega)$, on a

$$
D_X(Y) = \sum_{i=1}^n X^i (\Delta_i Y)(x) + \bar{X}_i (\bar{\Delta}_i Y)(x), \tag{225}
$$

avec pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$
(\Delta_i Y)(x)^j = \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x_i^\alpha}\right)_x + \Gamma_{ij}^k(x) Y^k(x), \tag{226}
$$

et

$$
(\bar{\Delta}_i Y)(x)^j = \left(\frac{\partial Y^j}{\partial \bar{x}_i^\alpha}\right)_x + \bar{\Gamma}_{ij}^k(x) Y^k(x). \tag{227}
$$

4.2. Sur les géodésiques. Soit V une α-variété et D une connexion linéaire sur V. On note D la dérivation covariante associée à la connexion. Etant donné $\gamma : [a,b] \to V$ un chemin de classe $\mathcal{C}^\alpha$ sur V, on dira que γ est une géodésique si pour tout $t \in [a,b]$, on a

$$D_{\left(\frac{d^\alpha \gamma}{dt^\alpha}{}_{t=0}\right)} \left(\frac{d^\alpha \gamma}{dt^\alpha}\right) = 0. \tag{228}$$

Si V est une variété Riemannienne et si la connexion est la connexion de Levi-Civita, alors on retrouve la définition classique des géodésiques.

Le résultat important est :

Proposition 4.1. *Soient V une α-variété munie d'une connexion, et D sa dérivée covariante associée. Soient x un point de V et X un vecteur de $T_x(V)$. Il existe pour $\epsilon > 0$, une infinité de géodésiques $\gamma : [0,\epsilon] \to V$ telles que*

$$\gamma(0) = x \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^\alpha \gamma}{dt}\right)_0 = X. \tag{229}$$

Démonstration. En appliquant la définition, nous obtenons les équations différentielles fractionnaires suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{d^\alpha}{dt^\alpha}\left(\dfrac{d^\alpha \gamma_j}{dt^\alpha}\right) + \Gamma_{ij}^k \left(\dfrac{d^\alpha \gamma_k}{dt^\alpha}\right) & = & X_i \\ \dfrac{d^\alpha}{d\bar{t}^\alpha}\left(\dfrac{d^\alpha \bar{\gamma}_j}{d\bar{t}^\alpha}\right) + \bar{\Gamma}_{ij}^k \left(\dfrac{d^\alpha \bar{\gamma}_k}{d\bar{t}^\alpha}\right) & = & \bar{X}_i \end{array} \tag{230}$$

En posant

$$y_j = \frac{d^\alpha \gamma_j}{dt^\alpha} \quad \text{et} \quad \bar{y}_j = \frac{d^\alpha \bar{\gamma}_j}{d\bar{t}^\alpha}, \tag{231}$$

on transforme les équations (230) en un système d'équations différentielles fractionnaires linéaires. Or, on a vu au (chap.1,§.6) que ces équations admettent une infinité de solutions. On en déduit le résultat. □

Ce point contraste fortement avec le cas des variétés Riemanniennes. Il est à la base du raisonnement de Nottale sur la relativité d'échelle.

Remarque. En général, la connexion qui définie les géodésiques est la connexion de Levi-Civita. Elle est unique et définie à partir de la donnée d'une métrique et de quelques conditions particulières (sans torsion, à dérivée covariante nulle sur la métrique). La caractérisation de l'analogue de la connexion de Levi-Civita sur une variété fractale sera discutée dans un autre travail.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

- Ce travail donne un cadre mathématique rigoureux pour l'analyse de la géométrie et de la dynamique sur des objets fractals. Ces objets sont à la base des travaux de Nottale en relativité d'échelle.

- Dans cet article, nous avons traité le cas des variétés fractales uniformes, c'est à dire dont la classe des chemins non triviaux est d'ordre α, avec un α indépendant du point sur la variété (la sphère de Weierstrass par exemple). Le cas d'un exposant variable est plus délicat (voir [SR]). Notamment, la caractérisation de la classe des fonctions plates est difficile. Une définition rigoureuse de l'espace tangent pour ces objets doit tenir compte de cette difficulté. Dans un prochain travail, on fera une étude détaillée de la variété fractale de Riemann.

- Le §.5 est une introduction aux équations différentielles fractionnaires. Elle nous a permis de prouver l'existence d'une infinité de géodésiques sur une variété fractale. Le calcul explicite des solutions est difficile car, contrairement à Riemann-Liouville, il n'existe pas d'opérateur explicite d'intégration (intégrale de Riemann-Liouville).

La définition d'une intégrale définie pour l'opérateur de α-dérivation sera abordée dans un autre article. Nous donnerons aussi des méthodes de résolution numérique de ce type d'équations.

- Comme annoncé dans l'introduction, nous avons justifié les hypothèses utilisées par Nottale pour fonder la notion de dérivation covariante d'échelle, permettant d'unifier, par le principe de la relativité, la mécanique quantique et classique. Dans un prochain travail, nous donnerons la forme de la dérivée covariante d'échelle et ses différentes propriétés.

APPENDICE 1. SPHÈRE FRACTALE DE RIEMANN $S_2^{\alpha(x)}$.

Dans les figures qui suivent, on a choisi pour f la fonction de Riemann (voir §.3.3.1, chap.1). On donne la forme de S_2^{α} pour une résolution (notée ϵ dans les légendes) de plus en plus fine. Ces variétés sont appelées sphères fractales de Riemann.

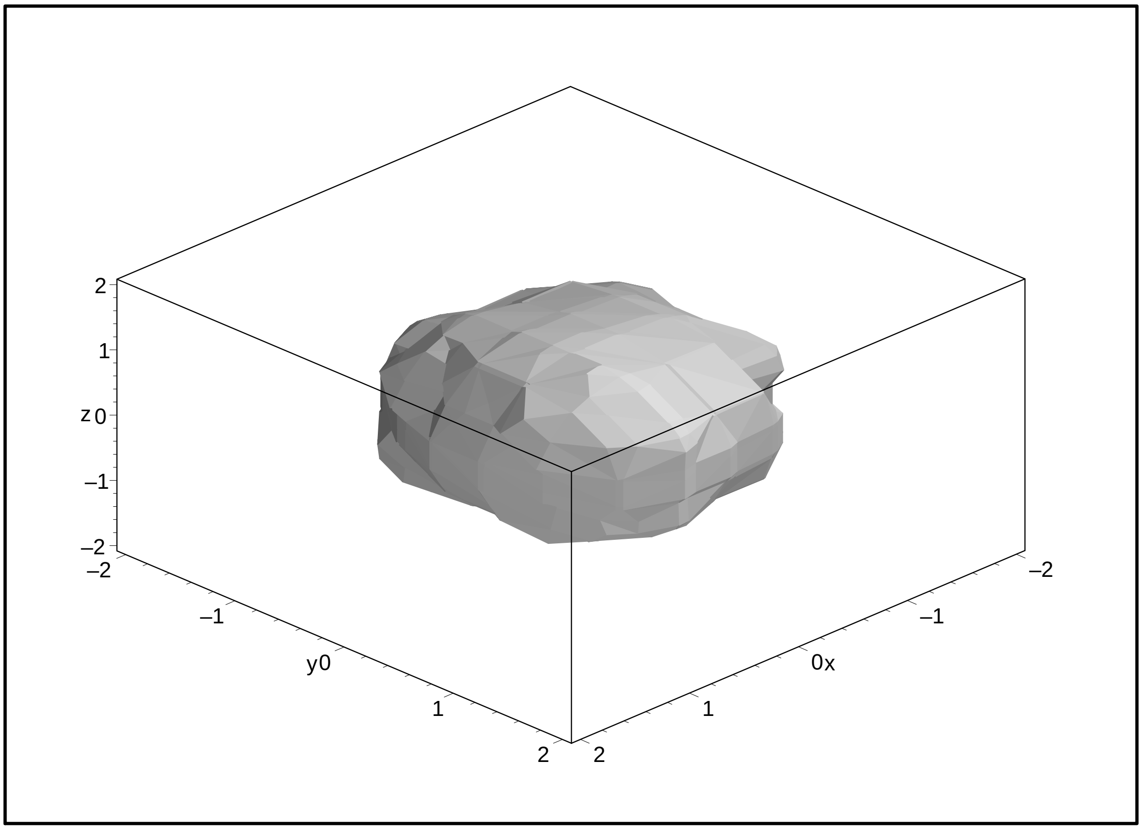

Figure 11: Sphère fractale de Riemann S_2^{α}, avec $\epsilon = 1/10$.

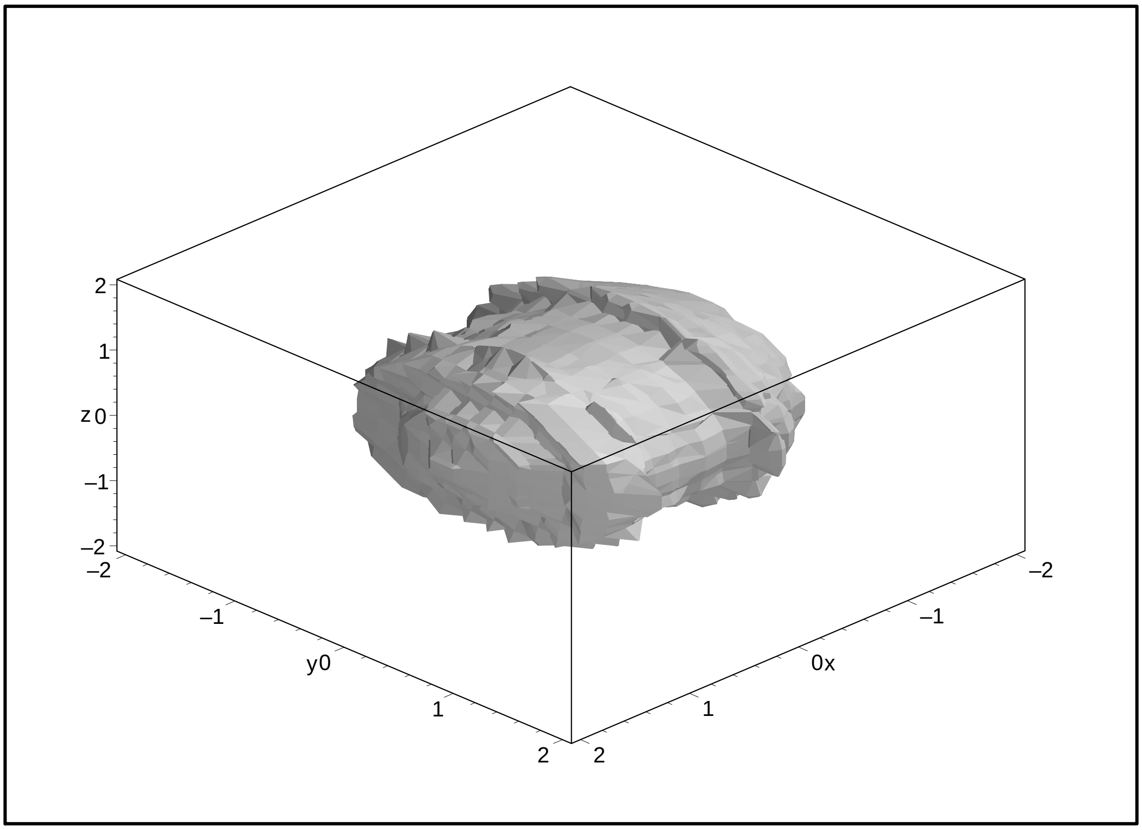

Figure 12: Sphère fractale de Riemann S_2^α, avec $\epsilon = 1/20$.

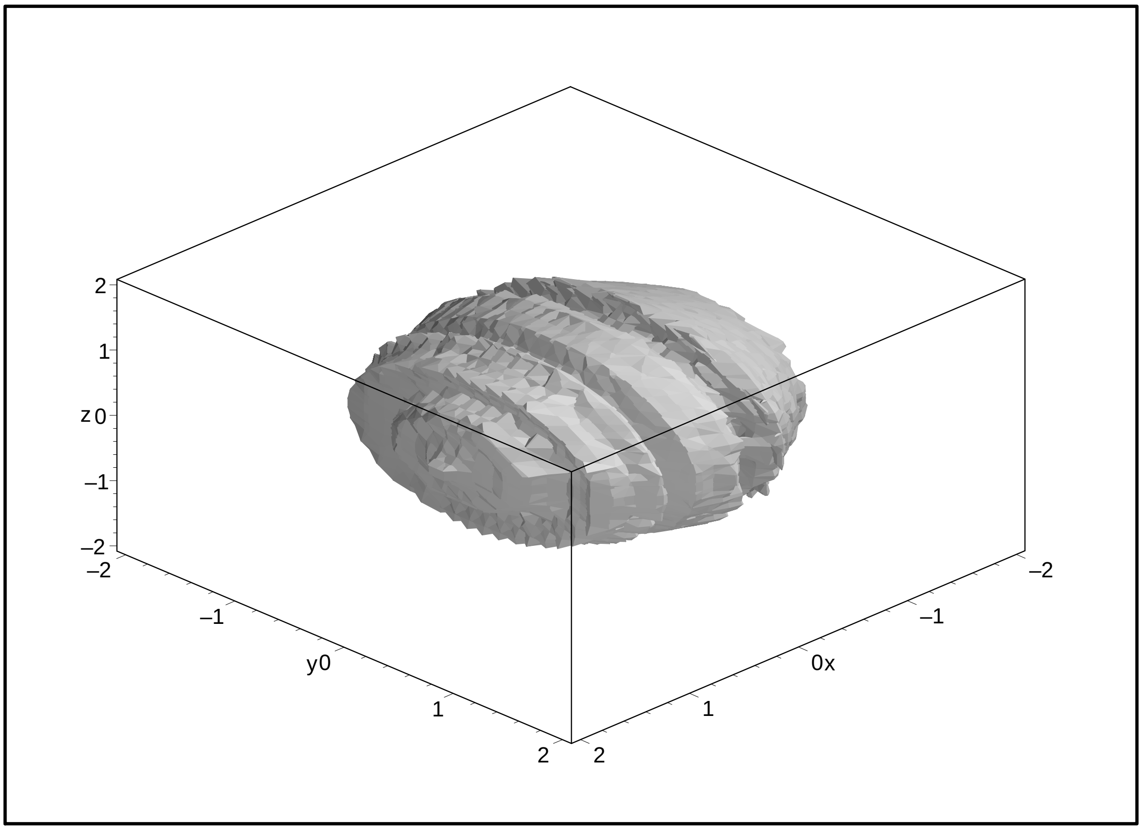

Figure 13: Sphère fractale de Riemann S_2^α, avec $\epsilon = 1/30$.

APPENDICE 2. SPHÈRE DE WEIERSTRASS.

Dans les figures qui suivent, on a choisi pour f la fonction de Weierstrass (voir §.3.3.1, chap.1) avec $\alpha = 0.2$, $q = 6$. On donne la forme de S_2^α pour une résolution (notée ϵ dans les légendes) de plus en plus fine. Ces variétés sont appelées sphères de Weierstrass et sont notées $W_{\alpha,q}$.

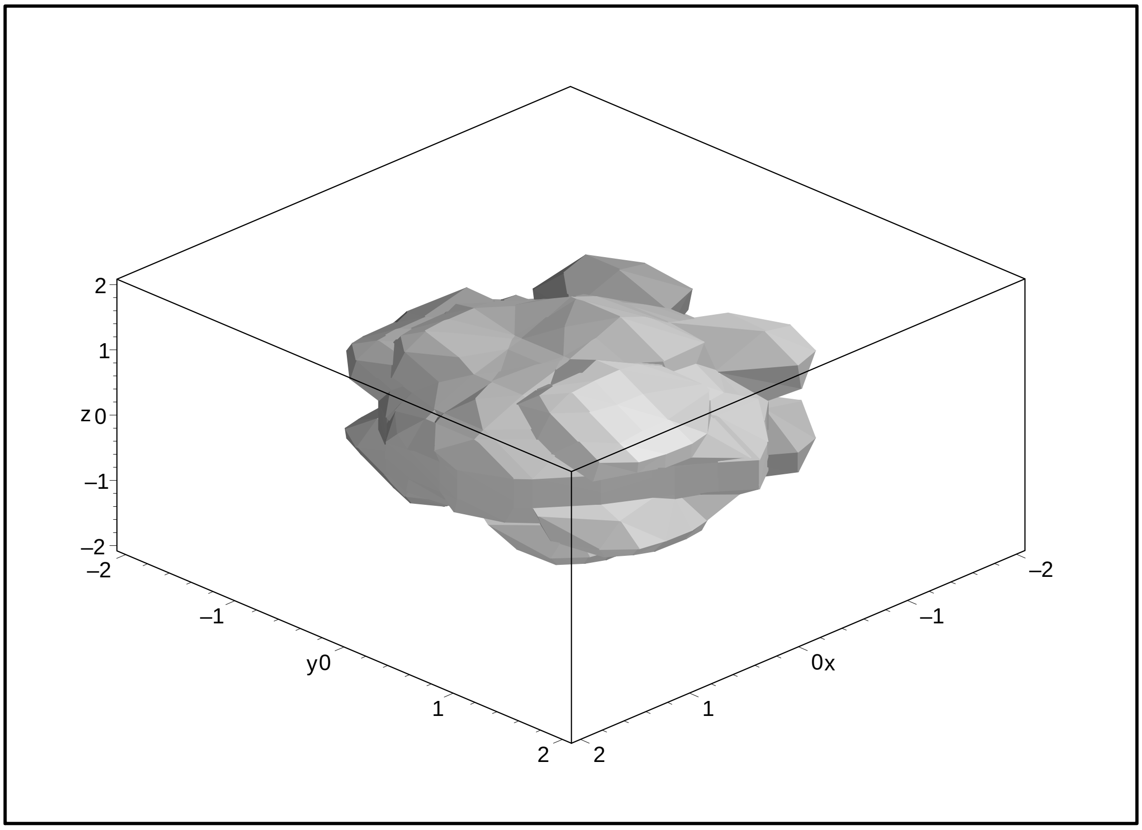

Figure 14: Sphère de Weierstrass $W_{0.2,6}$ et $\epsilon = 1/10$.

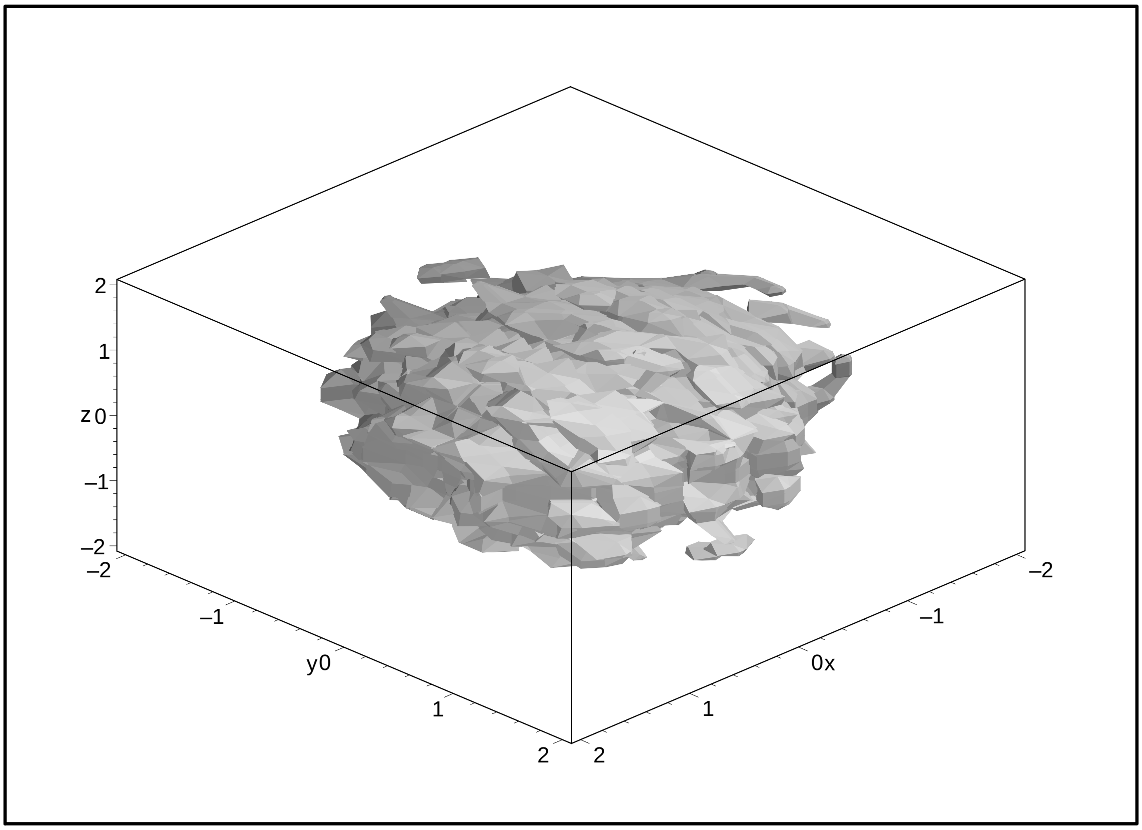

Figure 15: Sphère de Weierstrass $W_{0.2,6}$ et $\epsilon = 1/20$.

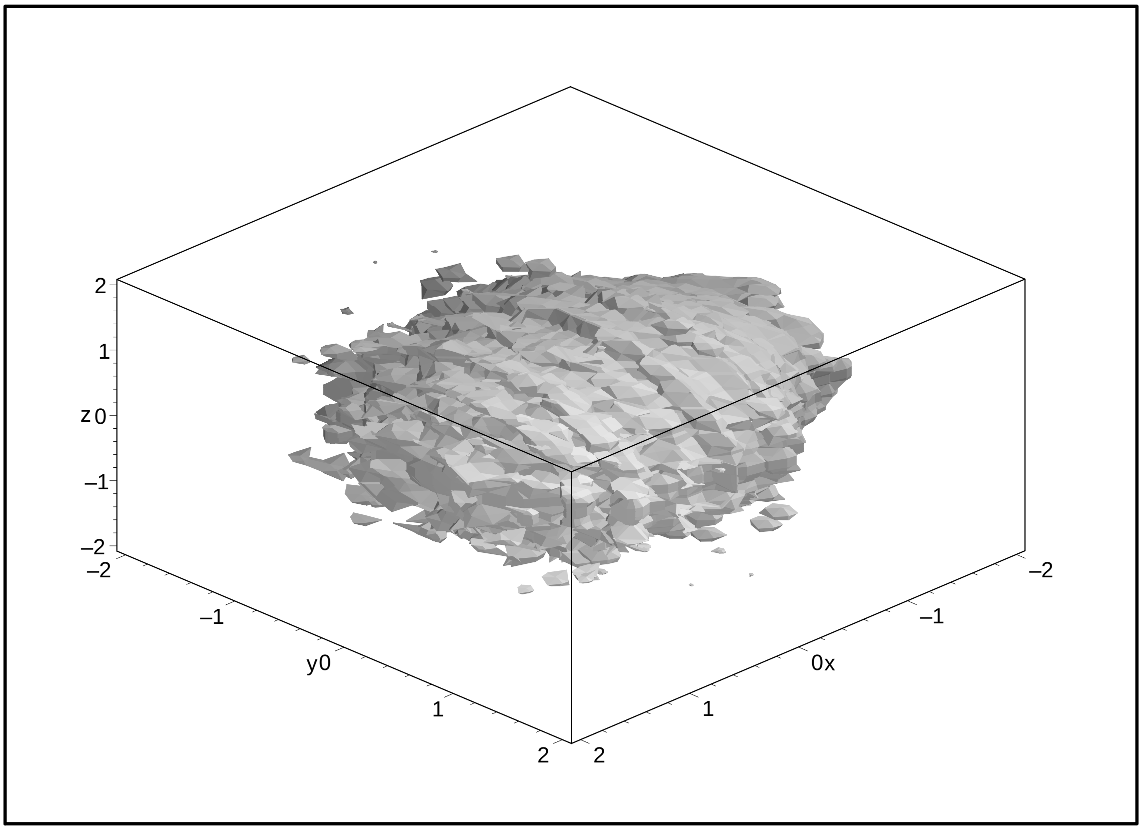

Figure 16: Sphère de Weierstrass $W_{0.2,6}$ et $\epsilon = 1/30$.

On regarde l'effet de la variation de l'indice de régularité α sur la sphère de Weierstrass $W_{\alpha,6}$.

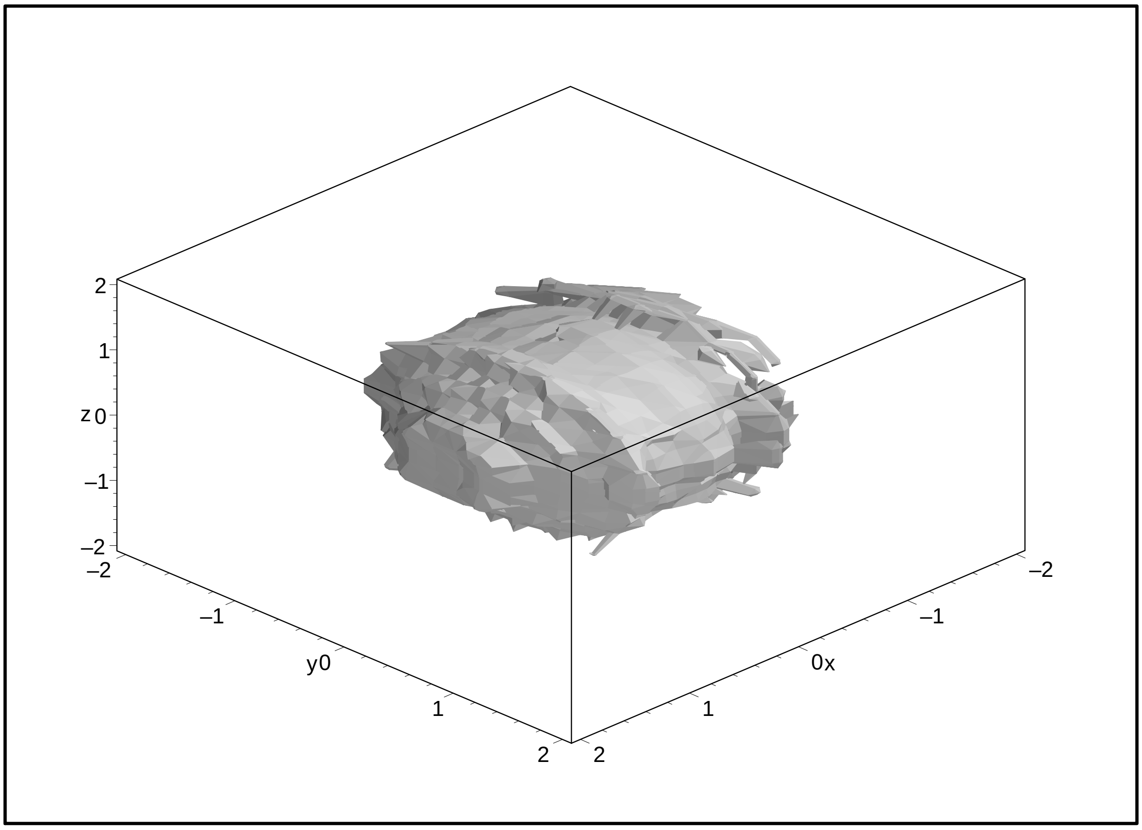

Figure 17: Sphère fractale de Weierstrass $W_{\frac{3}{4},6}$ et $\epsilon = 1/20$.

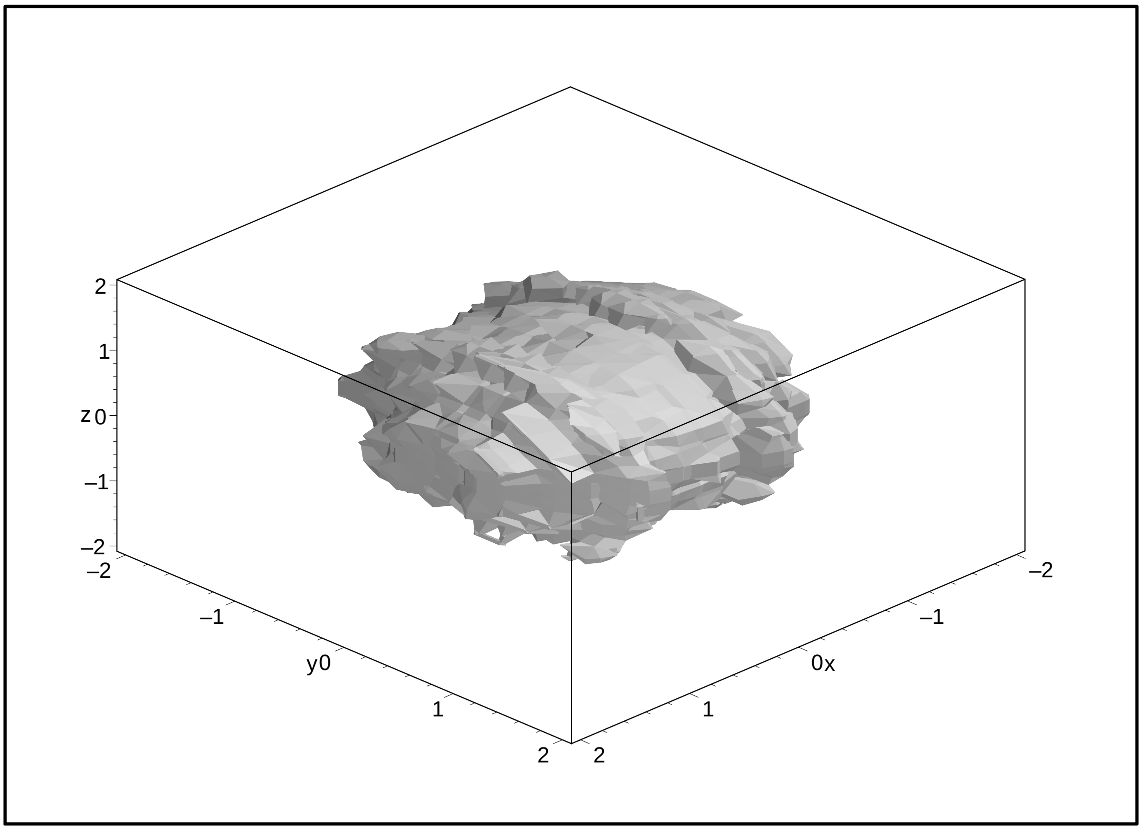

Figure 18: Sphère fractale de Weierstrass $W_{\frac{1}{2},6}$ et $\epsilon = 1/20$.

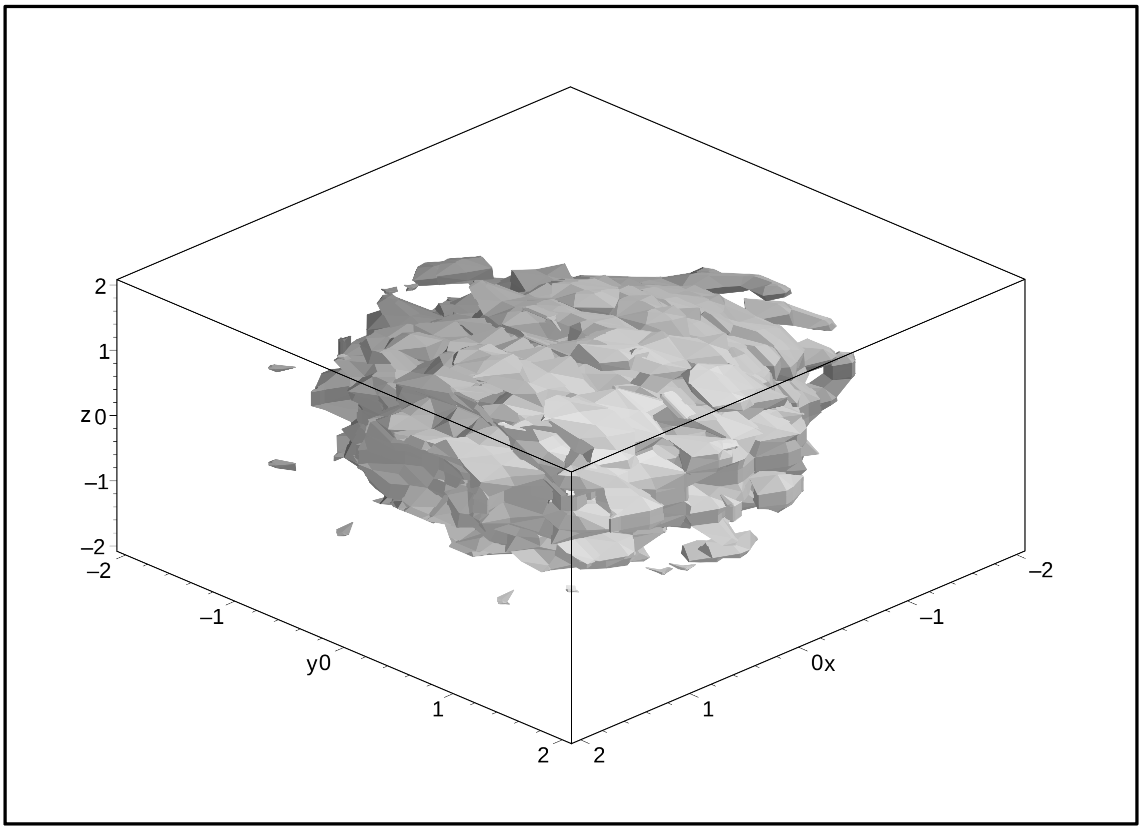

Figure 19: Sphère fractale de Weierstrass $W_{\frac{1}{4},6}$ et $\epsilon = 1/20$.

RÉFÉRENCES

[AW] L. Abbot, M. Wise, Dimension of a quantum-mechanical path, American Journal of Physics, vol. 49, (1981).

[B] N. Bourbaki, Fonctions d'une variable réelle 4, (1961), Hermann.

[B1]F. Ben Adda, Geometric interpretation of the fractional derivative, J. of the Fractional Calculus, Vol. 11, p.21-51, (1997).

[B2] F. Ben Adda, La différentiabilité dans le calcul fractal, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 326, (1998).

[BC] F. Ben Adda, J. Cresson, Divergence d'échelle et différentiabilité, C. R. Acad. Sciences Paris, (2000).

[C1] G. Cherby, Dimension locale, quantité de mouvement et trajectoire, dans *Fractals, dimension non entière et applications*, Masson, (1987), p. 340-352.

[C2] G. Cherby, Dimensionalité spatio-temporelle, ibid, p. 353-359.

[CD] J. Cresson, J-N. Dénarié, Geometry and dynamics of numbers under finite resolution, prépublication de l'équipe de Mathématique de Besançon, à paraitre dans Lecture notes in Physics.

[Ci] M. Cissoko, *Relativité restreinte*, cours, Paris VI, (1992).

[D] M.M. Djarbashian, *Harmonic analysis and boundary value problems in the complex domain*, Birkhauser 1993, Operator theory advances and applications, vol. 65.

[DD] A. Deledicq, M. Diener, *Leçon de calcul infinitésimal*, Armand collin, Paris 1989.

[Ei] A. Einstein, Relativité I et II, éditions du CNRS/Seuil, (1993).

[F] K. Falconer, *Fractal geometry, Mathematical foundations and applications*, John Wiley and Sons, (1990).

[FH] R.P. Feymman, A.R. Hibbs, *Quantum mechanics and Path integrals*, MacGraw-Hill, (1965).

[H] G.H. Hardy, Weierstrass non-differentiable function, Trans. Amer. Math. Soc. 17 (1916), 301-325.

[He] E. Hebey, Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés, Paris, Diderot, (1997).

[HW] Hubbard. J, West. B, *Equations différentielles et systèmes dynamiques*, Cassini Ed., Paris, (1999).

[HWa] Hairer, E, Wanner, G, *Analysis by its history*, Readings in Mathematics, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, (1996).

[KF] Kolmogorov, A, Fomine, S, *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionelle*, Ed. MIR. Moscou.
[KG1] K. Kolwankar, A.D. Gangal, Local fractional derivatives and fractal functions of several variables, dans les Proceedings de *Fractals in Engineering*, (1997).
[KG2] K. Kolwankar, A.D. Gangal, Hölder exponents of irregular signals and local fractional derivatives, Pramana Journal of physics, Vol. 48, 1, (1997), p. 49-68.
[KG3] K. Kolwankar, A.D. Gangal, Fractional differentiability of nowhere differentiable functions and dimensions, Chaos 6(4), p.505-513, (1996).
[LF] J. Lelong-Ferrand, *Géométrie différentielle*, Masson et Cie, éditeurs, (1963).
[Ma] B. Mandelbrot, *Les objets fractals*, Flammarion, Paris, (1975).
[M] A. Le Méhauté, *Les géométries fractales*, Hermès, (1990).
[MNN]A. Le Méhauté, R.R. Nigmatullin, L. Nivanen, *Flèches du temps et géométrie fractale*, Hermès, (1998)
[N1] L. Nottale, *Fractal Space-Time and Microphysics: Towards a Theory of Scale Relativity*, World Scientific, (1993).
[N2] L. Nottale, Scale-relativity and quantization of the universe I. Theoretical framework, Astron. Astrophys. 327, 867-889, (1997).
[N3] L. Nottale, *La relativité dans tous ses états*, Hachette coll. Sciences, (1999)
[N4] L. Nottale, L'espace temps fractal, Pour la science 215, (1995), p. 34-41.
[N5] L. Nottale, Scale relativity and Schrodinger's equations, Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 9, no. 7, pp. 1051-1061, (1998).
[Ni] K. Nishimoto, Fractional Calculus, Vol.1 (1984), Vol.2 (1987), Vol.3 (1989), Vol. 4 (1991), Deacartes Press, Japan.
[NS] L. Nottale, J. Schneider, Fractals and non standard analysis, J. Math. Phys. 25, (1984), p. 1296-1300.
[Or] G. Ord, Fractal space-time: a geometric analogue of relativistic quantum mechanics, Journal of Physics A : Mathematical and general, vol. 16, (1989).
[OS] K.B. Oldham, J. Spanier, *The fractional Calculus*, Academic press, (1974).
[PM] Palis. J, de Melo. W, *Geometric theory of dynamical systems, an introduction*, Springer-Verlag New York, (1982).
[P] Podlubny, I, *Fractional differential equations*, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 198, Academic Press, (1999).
[R] B. Ross, *Fractional Calculus and its applications*, Lect. Notes in Math. (Springer Verlag), 457, (1975).
[RSR] B. Ross, S. Samko, E. Russel Love, Functions that have no first order derivative might have fractional derivatives of all ordres less than one, Real Analysis

Exchange, Vol. 20(2), 1994/5, P; 140-157.
[SR] S. Samko, B. Ross, Integration and differentiation to a variable fractional order, Integral transforms and special functions, 1993, Vol.1, 4, p. 277-300.
[T] C. Tricot, *Courbes et dimension fractale*, 2^d édition, Springer, (1999).
[W] Y. Watanabe, Notes on the generalized derivative of Riemann-Liouville and its application to Leibnitz's formula, II, Tôkoku Math. J, 34, 8-41, (1931).