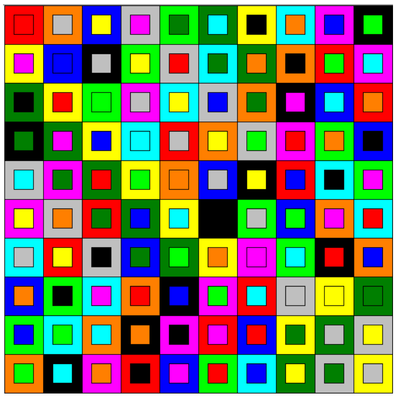
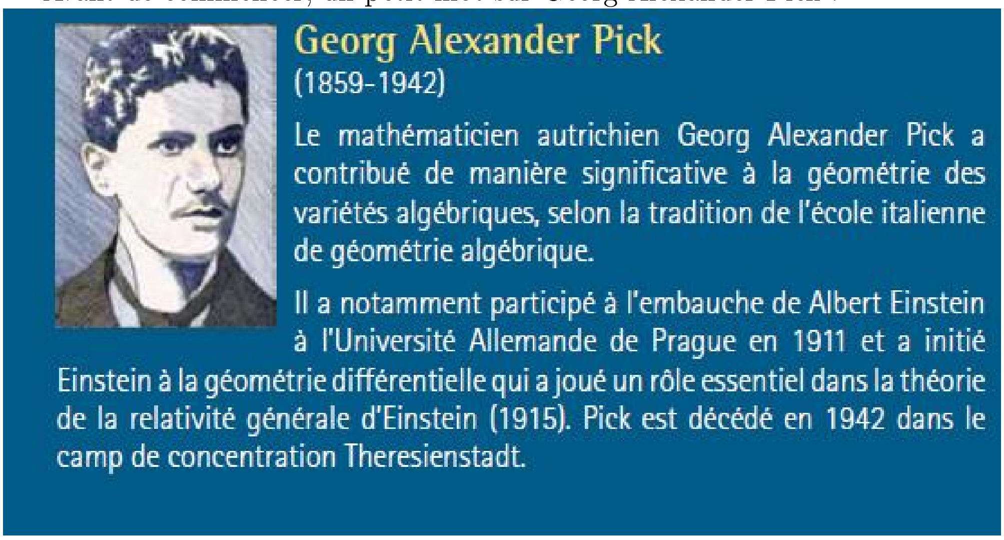
Le théorème de Pick



Vous avez tous appris les formules permettant de calculer l'aire d'un carré, d'un triangle ou d'un rectangle. La formule passe toujours par la multiplication de deux longueurs qui justement nous dit que l'on a affaire avec une aire qui s'exprime par exemple en m^2 si on multiplie des longueurs en mètre. Le théorème de Pick donne une formule permettant de calculer l'aire d'un polygone (simple) en ne faisant que des additions. Elle ne fonctionne pas pour tous les objets non plus mais la démonstration est instructive.

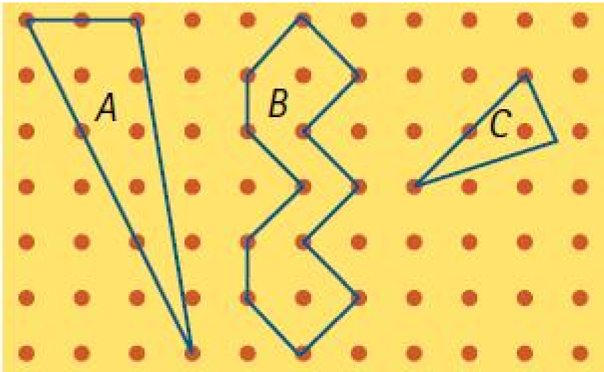
Avant de commencer, un petit mot sur Georg Alexander Pick :



1. Les polygones simples

On considère le treillis $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de points (x, y) du plan, i.e. l'ensemble des points (x, y) dont les coordonnées sont entières. Un polygone est une figure géométrique plane formée de segments de droites qui ne se coupent pas et qui délimitent une région fermée. On dira qu'un polygone est simple si tous les segments de droite sur son contour relient des points du treillis.

1. Faire quelques dessins de polygones simples et non-simples.
2. Déterminer dans la figure suivante les polygones simples de ceux qui ne le sont pas !



2. Le théorème de Pick

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de Pick :

Théorème de Pick : *Soit un polygone simple P dont i est le nombre de point du treillis à l'intérieur de P et b le nombre de points du treillis sur le bord du polygone. ALors, l'aire A_P du polygone est*

$$A_P = i + \frac{b}{2} - 1.$$

Afin de mieux cerner cette formule, faisons quelques tests :

1. Faire un carré simple et calculer son aire.
2. Même chose pour un triangle simple.
3. Même chose pour une forme de votre choix.

Bon, cette formule fonctionne. Le but du projet est justement de la démontrer ! Pour cela, nous allons procéder en plusieurs étapes. Avant de commencer :

1. Où sont passés les m^2 si les vous manipulez des mètres pour les longueurs ?

On voit qu'il faudrait peut-être être plus précis sur la formulation du théorème...

1. Formulez votre propre version du théorème !

3. Décomposition des polygones

On s'en doute, demontrer la formule directement pour un polygone simple risque d'être difficile. Alors, nous allons simplifier notre problème en ramenant ce calcul à celui d'objets pour lesquels la formule est bien établie. L'idée est la suivante : Il est possible de découper tout polygone simple en triangle simple.

1. Faire un dessin de polygone simple quelconque. Effectuer la décomposition en triangles simples.
2. Peut-on formuler un algrithme de décomposition, i.e. une marche à suivre pour la fabriquer à coup sûr ? On pourra expliquer l'algorithme sur un dessin.

Nous voila donc maintenant avec notre première réduction : l'aire d'un polygone simple peut se calculer à partir de celle des triangle simples. Nous allons en déduire un schéma de démonstration de la formule de Pick.

4. Le schéma de démonstration

L'idee est la suivante :

- Démontrer la formule de Pick pour un triangle simple.
- Démontrer que si la formule est valide pour un polygone simple P, alors elle le sera aussi pour un polygone simple $P' = P \cup T$ où T est un triangle simple.

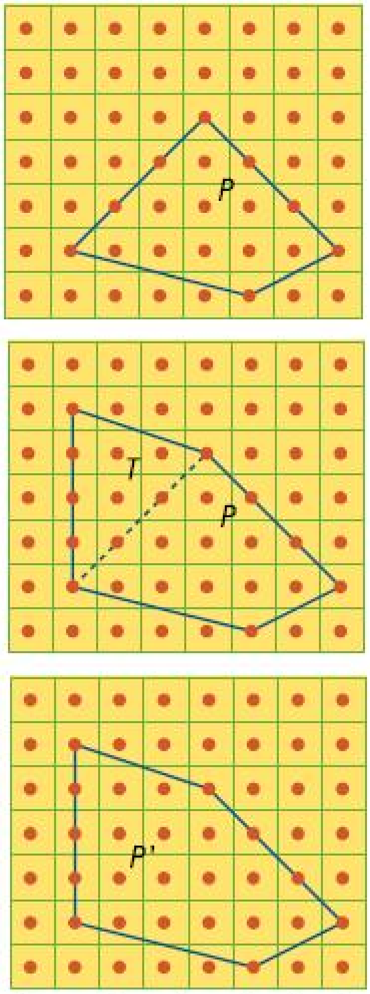
Par le théorème de décomposition précédent, ces deux étapes démontreront la formule de Pick pour tout polygone simple.

1. Écrire en detail le raisonnement précédent et l'expliquer avec des dessins.

Il nous reste à démontrer les deux étapes de notre raisonnement. Allons-y !

5. Collage d'un triangle simple

Commençons par coller un triangle simple à un polygone simple :



Ajout d'un triangle simple à un polygone simple
$P' = P \cup T$

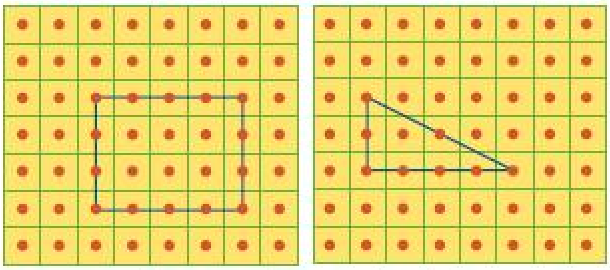
Supposons que la formule de Pick soit vraie pour le polygone simple P et le triangle simple T. En notant k le nombre de points du treillis intérieurs à P' qui sont sur la frontière commune entre P et T.

1. Calculer $i_{P'}$ en fonction de i_P, i_T et k.
2. Calculer $b_{P'}$ en fonction de b_P, b_T et k.
3. Vérifier que la formule de Pick est valide pour le polygone P'.

Il nous reste maintenant à démontrer la formule de Pick pour un triangle simple qui en définitive ne sont pas si simples que ça !

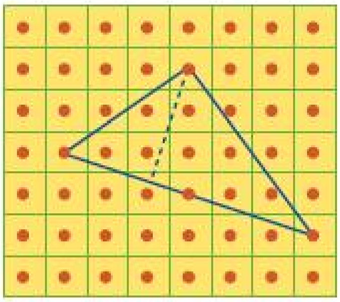
6. La formule de Pick pour un triangle simple

Comme nous le disions, les triangles simples sont encore trop compliqués ! Nous allons donc nous ramner à manipuler des objets encore plus simples : les triangles rectangles simples e les rectangles simples qui ressemblent à ?cca :



Un rectangle et un triangle rectangle simples.

Le fait que nous puissions nous ramner à ces deux types d'objets n'a rien d'évident car nous avons la contrainte de découper notre triangle initial en triangle rectangle certe mais encore simple, ce que la procédure usuelle ne fait pas obligatoirement comme on le voit ici :



En abaissant la hauteur, on forme deux triangles rectangles qui ne sont pas simples car un des sommets n'est pas sur un point du treillis.

Comme pour le cas général, nous allons procéder par étapes.

- Nous supposons que la formule est valide pour les triangles rectangles simples et les rectangles simples. Il faut alors démontrer que cela implique la validité de la formule de Pick pour tout triangle simple.
- Démontrer la formule de Pick dans le cas des rectangles et triangles rectangles simples.

Commençons donc par la première étape.

1. Prendre un triangle simple quelconque. Donner une construction d'un rectangle simple qui circonscrit le triangle simple.
2. Démontrer à l'aide de la construction précédente que l'aire du triangle simple se calcule à l'aide de l'aire de triangles rectangles simples et de celle d'un rectangle simple.
3. Établir les formules reliant les b et les i des différents éléments ci-dessus.
4. En déduire la validité de la formule de Pick pour un triangle simple.

Pour la fin de la démonstration, il faut regarder la relation entre un rectangle simple et un triangle rectangle simple....Je vous laisse faire.

7. Plus loin ?

Peut-on généraliser cette formule ? Pour des objets plus cmpliqués que des polygones, par exemple des polygones simples avec des trous ? Et en dimension supérieure ?

Références

Ce projet est basé sur l'article de Isabelle Jallifer-Verne et Marc Laforest de l'école polytechnique de Montréal, intitulé "La formule de Pick", parudans la revue en ligne Accromath, Vol.5, été-automne 2010.