Suites, Chaos et Graphes de Markov

25 mars 2014

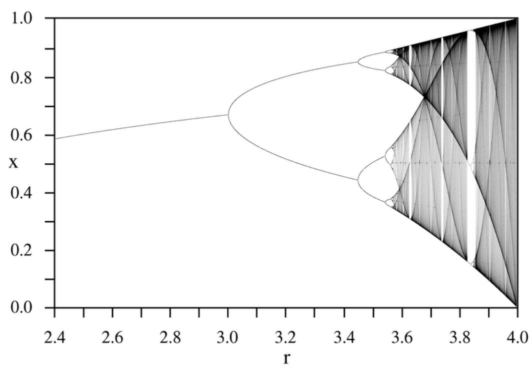


Table des matières

1 Introduction

Le but de ce projet est de démontrer un théorème célèbre des systèmes dynamiques discrets appelé *période trois implique chaos* et qui fit grand bruit au moment de sa parution en 1975 par deux mathématiciens américains Li et Yorke. En fait, ce théorème est un corollaire d'un théorème général sur les suites récurrentes dû au mathématicien ukrainien Sarkovskii en 1964. La démonstration que nous allons donner utilise la théorie des graphes de Markov.

2 Suites récurrentes et orbites périodiques

2.1 Les suites : la suite logistique

De quoi s'agit-il ? Nous allons étudier des suites récurrentes de la forme

$$u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N},$$

où f est une fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les suites interviennent dans de nombreux domaines des mathématiques et de la physique. On peut en avoir une intuition de la manière suivante : on regarde l'évolution au cours du temps d'un phénomène physique comme par exemple la variation de la courbe de température ou encore l'élévation du niveau de la mer et on décide de noter les résultats d'une mesure à intervalle de temps régulier. On obtient ainsi une suite de valeurs u_n. Lorsque le phénomène est régit par une loi il est alors possible de donner la manière de passer de u_n à u_{n+1}, c'est à dire f.

Construisons ensemble un exemple très connu, celui de la **suite logistique** et qui fut popularisée par Robert May un biologiste britannique en 1976.

Cette suite est une version discrète d'un modèle continu de dynamique des populations développé par le mathématicien belge Jean-François Verhulst dans son livre "Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population".

Le but est ici de construire un modèle "réaliste" de dynamique des populations, i.e. d'évolution de la population d'un groupe donné comme par exemple les êtres humains ou les sardines au cours du temps. La première idée est de dire que l'évolution d'une population entre deux années consécutives est fixée par un taux de reproduction qui est constant $a \in \mathbb{R}$. On a alors la suite $u_{n+1} = a.u_n$ qui est une suite géométrique. Dans ce cas, il est facile de décrire tous les comportements possibles suivant a.

Exercice 1.

Décrire le comportement des suites lorsque $\mid a \mid = 1$, $\mid a \mid > 1$ et $\mid a \mid < 1$, i.e. pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$. Que se passe-t-il pour u_n lorsque n tend vers l'infini ?

Ce modèle est évidemment trop simple. Dans le cas où le taux de reproduction est plus grand que 1 on sait que la population ne pourra pas tendre vers l'infini. Il y a des contraintes comme celle de l'espace dans lequel la population évolue, ou encore la quantité de nourriture, qui limite l'accroissement de la population. Comment prendre en compte la donnée que l'évolution de la population se fait sous une contrainte de finitude ?

L'idée est d'introduire une population maximale u_{max} supportée par le milieu. Plus on va se rapprocher de cette population limite moins grand va être son taux de reproduction. Pour modéliser cette idée nous allons introduire un taux de reproduction entre le temps n et le temps $n+1$ qui dépend de la proximité à la valeur maximale. Un choix possible est : $a_n = a.(u_{max} - u_n)$. Dans ce cas, lorsque u_n approche de la valeur maximale u_{max} le taux de reproduction se rapproche de zéro. Il y a donc une interaction forte entre le milieu et l'évolution de la population. Le modèle est donc maintenant donné par la suite : $u_{n+1} = a(u_{max} - u_n).u_n$. On peut "normaliser" cette écriture en prenant comme variable la quantité $v_n = u_n/u_{max}$. On obtient alors la suite

$$v_{n+1} = a(1 - v_n).v_n,$$

qui est le modèle logistique. Par définition de v_n on s'intéresse à des $v_n \in [0, 1]$ car $0 \leq u_n \leq u_{max}$. On introduit donc la fonction

$$f_a(x) = a.x.(1 - x), \quad x \in [0, 1].$$

Exercice 2.

Faire quelques tests numériques sur cette suite pour différentes valeurs de a. En particulier $a = 1/2$, $a = 2$, $a = 3,3$, $a = 3,5$, $a = 3,6$ et $a = 4$.

Le comportement de cette suite est donc beaucoup plus compliqué que le modèle initial. On parle pour $a \geq 3,6$ de **suites chaotiques** car le comportement de la suite pour des valeurs des conditions initiales aussi proche que l'on veut diverge très vite.

2.2 Orbites périodiques et représentation

Les tests numériques font apparaître des suites qui vont osciller entre plusieurs valeurs. On parle alors d'**orbites périodiques**. On va introduire les objets suivants :

- L'orbite d'une condition initiale u_0 est l'ensemble des points obtenus par itération de f, i.e. l'ensemble des u_n pour $n \in \mathbb{N}$.
- Une orbite est périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$ si p est le plus petit entier tel que $u_p = u_0$.

Une orbite de période 1 est un point fixe (ou un point d'équilibre) : pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = u_0$ (on reste dans le même état).

Une orbite périodique de période 2 est telle que u_0, $u_1 \neq u_0$ et $u_2 = u_0$. Ensuite, on revient toujours sur ces valeurs : on oscille entre la valeur u_0 et la valeur u_1.

2.2.1 Représentation des suites

Une manière commode de représenter les suites est la suivante : on trace la courbe f définissant la suite récurrente. On trace aussi la droite $y = x$. Pour un u_0 donné sur l'axe des abscisses, on place le point d'ordonnée u_1 que l'on relie par un segment orienté de u_0 vers u_1. Ensuite, on projette le point (u_0, u_1) sur la droite $y = x$ afin d'obtenir le point (u_1, u_1). Pour obtenir u_2 il suffit alors de tracer le segment vertical à partir de ce point jusqu'à la courbe représentative de f. On obtient ainsi le point (u_1, u_2). Pour "voir" l'évolution de la suite, il suffit alors d'itérer cette construction.

2.2.2 Recherche des orbites périodiques

Pour déterminer les orbites périodiques de période 1, 2, 3, etc il faut pouvoir résoudre l'équation

$$f^p(u_0) = u_0,$$

où f^p représente la composée de f n-fois, i.e. $f^p = f \circ \cdots \circ f$. Dans le cas de la suite logistique :

Exercice 3.

1 - Déterminer les points fixes de f.
2 - Déterminer les orbites périodiques de période 2 [N'oubliez pas qu'un point fixe est aussi une orbite périodique de période 2 !].

La recherche explicite des orbites périodiques est même dans le cas où la fonction f est très simple délicate et devient vite impraticable. Pour visualiser les autres cas, comme par exemple les orbites périodiques de période 3, on va représenter f^3 et voir si il existe une intersection avec la droite $y = x$.

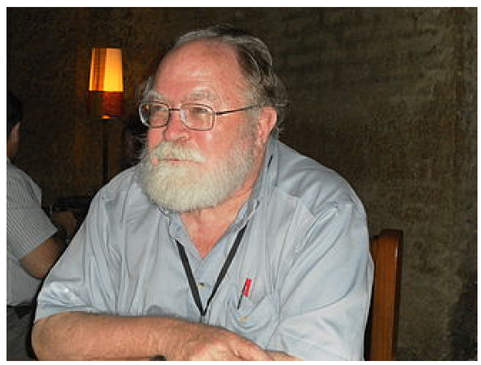
Exercice 4.

3 - Représenter pour différentes valeurs de a les fonctions f_a^2, f_a^3, f_a^4. Que concluez-vous ?

On voit qu'il n'existe pas toujours de période 2 ou de période 3. Or ce sont justement ces orbites qui vont provoquer des changements de comportement.

3 Le théorème de Li et Yorke

Nous sommes maintenant en mesure de formuler le théorème de Li et Yorke :



Théorème 5 (Période 3 implique Chaos)**.**

Si $f : [0,1] \to [0,1]$ est une fonction continue ayant un point périodique de période 3, alors elle a des points périodiques de toutes les périodes.

La suite logistique rentre dans le cadre d'application du théorème de Li et Yorke et permet d'expliquer en partie les résultats observés. En particulier, nous avons vu que les orbites périodiques de période 3 n'existent pas toujours mais seulement pour certaines valeurs de a, en particulier $a > 3$. Or c'est exactement à partir de ce moment là où le comportement de la suite devient imprévisible. C'est une manifestation du Chaos dont il est fait allusion dans le théorème. Le Chaos dans les suites récurrentes ne veut pas dire qu'il n'existe pas de structures et de comportements réguliers. C'est plutôt que ces comportements réguliers, ici les orbites périodiques, s'entremêlent les unes aux autres et provoquent une complexité globale.

La démonstration de ce théorème repose sur l'introduction de certains graphes appelés **graphes de Markov** associés à une partition. Comme nous allons le voir, ces graphes permettent de coder efficacement l'information qui nous intéresse ici : comment un point de l'intervalle $[0,1]$ bouge avec f.

4 Graphes de Markov

On note $I = [0,1]$ et $f : I \to I$ une fonction continue. Si $A \subset I$ est un sous-intervalle de I, on note $f(A)$ l'image de A par f.

Définition 6 (Graphe de Markov d'une fonction associé à une partition)**.**

Soit $\{I_k\}_k$ un ensemble fini de sous-intervalles fermés de I d'intérieurs disjoints deux à deux (on dira dans la suite une partition). Alors le graphe de Markov associé à la partition $\{I_k\}$ et à la fonction f est le graphe orienté dont les sommets sont les éléments de la partition $\{I_k\}$ et qui comporte une arête $I_i \to I_j$ si et seulement si $I_j \subset f(I_i)$.

La définition n'est pas forcement facile à comprendre aussi va-t-on faire un exemple.

On regarde la fonction "tente" dont le graphe est défini sur $[0,1]$ par

$$T(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1/2, \\ 2(1-x) & 1/2 \le x \le 1. \end{cases}$$

Exercice 7.

1- Tracer le graphe de $T(x)$.
2- Tracer la suite de condition initiale $u_0 = 0.4$ et la suite de condition initiale $u = 0.40001$.
3- Démontrer que le graphe de Markov de l'application tente associé à la partition $I_1 = [0,1/2]$ et $I_2 = [1/2,2]$ est donné par

L'idée qui sous-tend la définition des graphes de Markov est centrale dans l'étude des systèmes dynamiques : on découpe le système en un nombre fini de morceaux et on étudie la manière dont la fonction "mélange" chacun de ces morceaux. On pourrait penser que cette stratégie ne permet pas d'obtenir de résultats importants si le découpage est trop "grossier". C'est pourtant le cas comme nous allons le voir avec la démonstration du théorème de Li et Yorke.

5 Démonstration du théorème "période 3 implique Chaos"

5.1 Un lemme technique

Dans cette section, nous allons nous convaincre d'un certain nombre de résultats qui seront utiles dans la démonstration du théorème. Je vous encourage à faire des dessins ! Le but est d'expliquer avec des figures les résultats qui suivent :

Exercice 8.

1. Soient J_0 et J_1 deux intervalles fermés de I tels que $J_1 \subset f(J_0)$. Il existe alors un intervalle $\tilde{J}_0 \subset J_0$ tel que $f(\tilde{J}_0) = J_1$.
2. Soit $J \subset I$ un sous-intervalle de I tel que $J \subset f(J)$. Alors f a un point fixe dans J.
3. Soit $(I_i)_i$ une suite finie de sous-intervalles fermés de I tels que $I_{i+1} \subset f(I_i)$. Alors il existe une suite d'intervalles fermés emboîtés J_n telle que

$$J_n \subset J_0 \quad \text{et} \quad f^n(J_n) = I_n.$$

De plus il existe $x \in I_0$ tel que $f^n(x) \in I_n$ pour tout n.
4. En déduire que si il existe un chemin dans le graphe de Markov alors il existe un point dont l'itinéraire dans la partition est donné par ce chemin.

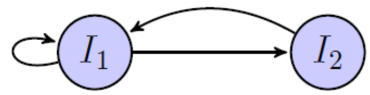
5.2 Les différentes étapes de la démonstration

On suppose que f a une orbite périodique de période 3. On note p_1, $p_2 = f(p_1)$ et $p_3 = f(p_2)$ les trois points définissant cette orbite avec $f(p_3) = p_1$. On suppose aussi que les points sont ordonnés de la manière suivante : $p_1 < p_2 < p_3$. L'autre cas se démontre de la même manière.

Exercice 9.

1. On note $I_1 = [p_2, p_3]$ et $I_2 = [p_1, p_2]$. Démontrer que $I_1 \cup I_2 \subset f(I_1)$ et $I_1 \subset f(I_2)$. En déduire le graphe de Markov.

En général, vous avez dû obtenir ça :



Nous allons maintenant construire de "bons" chemins dans ce graphe pour produire des orbites périodiques de toutes les périodes.

Exercice 10.

2. Supposons $m > 3$. On considère le chemin

$$I_1 \to I_1 \to \cdots \to I_1 \to I_2 \to I_1.$$

Démontrer que f admet alors un point x tel que $f^m(x) = x$.

Pour le moment, nous ne sommes pas certain que le point est de période exactement m et pas une période plus petite. Pour le montrer, nous allons faire un raisonnement par l'absurde.

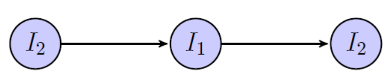
Exercice 11.

3. Supposons par l'absurde que $f^i(x) = x$ avec i compris entre 1 et $m-1$. Démontrer qu'alors $f^{i-1}(x) = f^{m-1}(x) \subset I_2$ et par ailleurs $f^{i-1}(x) \in I_1$.
4. En déduire que $f^{m-1}(x) \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$ et enfin $f^m(x) = p_3$.
5. Conclure.

Nous avons fabriqué des orbites périodiques de période $m \geq 3$. Il nous reste à fabriquer une orbite périodique de période 2.

Exercice 12.

6. En considérant le chemin



démontrer que f admet une orbite périodique de période 2.

6 Plus loin : le théorème de Sarkovskii

L'énoncé du théorème de Sarkovskii demande l'introduction d'un ordre particulier sur les nombres entiers.

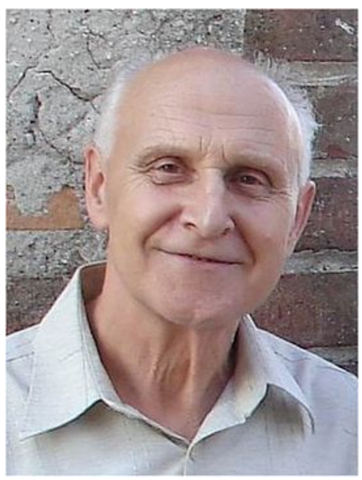
Définition 13.

On appelle ordre de Sarkovskii sur $\mathbb{N}^*$ l'ordre $\succ$ défini comme suit :

$$\begin{gathered} 3 \succ 5 \succ 7 \succ 9 \succ \cdots \succ 2.3 \succ 2.5 \succ 2.7 \succ \\ \cdots \succ 2^n.3 \succ 2^n.5 \succ \cdots \succ 2^{n+1}.3 \succ 2^{n+1}.5 \succ \\ \cdots \succ 2^n \succ 2^{n-1} \succ \cdots \succ 4 \succ 2 \succ 1 \end{gathered}$$

et c'est un ordre total.

On a le fameux théorème de A.N. Sarkovskii



Théorème 14 (Sarkovskii,1964)**.**

Soit $f : I \to I$ une fonction continue ayant un point périodique de période n. Alors pour tout vérifiant $m \succ n$, f admet un point périodique de période m.

Comme nous l'avons vu ci-dessus pour la démonstration du théorème de Li-Yorke, les graphes de Markov permettent de mieux visualiser la dynamique et ainsi de trouver les "bons" chemins. L'apport des graphes de Markov est encore plus flagrant dans la démonstration du théorème de Sarkovskii.

7 Références

J'ai principalement utilisé l'article de Jean-Yves Briend :

J-Y. Briend, Le théorème de Sarkovskii, Le journal des élèves de l'ENS Lyon, Vol.1 (1995), No. 3.

qui contient une présentation accessible du théorème de Li et Yorke et du théorème de Sarkovskii.

Un autre article contenant de nombreuses remarques historiques et divers compléments est donné par le texte de Daniel Perrin sur la suite logistique :

D. Perrin, La suite logistique et le chaos, 63.p, Université d'Orsay.

Par ailleurs la plupart des photos sont issues des articles de Wikipedia ou des pages professionnelles des mathématiciens J. Yorke, T.Y. Li, Sarkovskii.