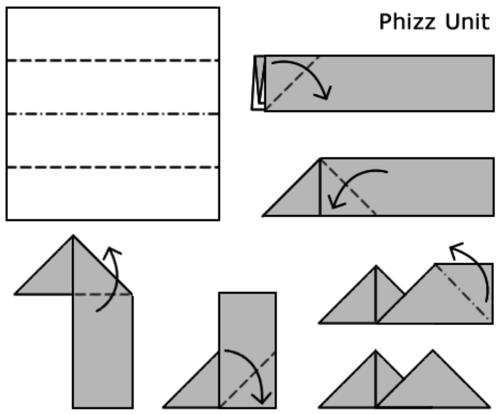
Objets géométriques en 3D et origami

Le but du projet est d'une part de construire des objets géométriques en utilisant des techniques de pliages de papier (origami en japonais) et d'autre part d'expliquer comment obtenir ces constructions.

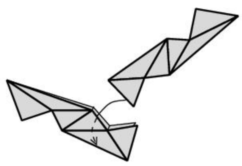
1. Premier pliage : le module de Tom Hull

Tous les objets que nous allons construire sont formés à partir de petits pliages appellés "modules". Ils forment ce que nous pourrions appeler des briques élémentaires. Il en existe beaucoup mais nous allons seulement utiliser celui crée par Tom Hull, mathématicien, en 1993 que l'on trouve aussi sous la dénomination de PHIZZ unit, PHIZZ étant l'acronyme de "Pentagon Hexagon Zig Zag".

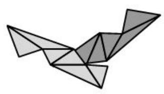
Voici la construction :



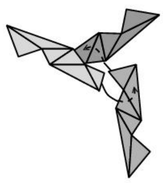
Pour fabriquer nos objets, nous aurons besoin d'assembler ces modules entre eux pour former des structures "solides" :



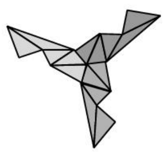
Insert one unit into the other one from the side so that the creases overlap.



The two units are joined.



Insert a third unit into the second unit in the same manner. Tuck the first unit into the third unit.

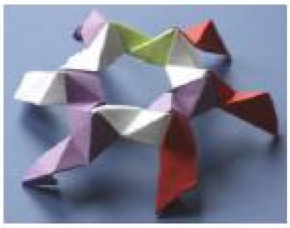


The completed group of three units.

Nous sommes maintenant prêt à faire nos constructions.

Comme premier travail, vous pouvez utiliser les modules précédents pour former des pentagones, des hexagones et des heptagones réguliers. Le pentagone et l'hexagone devraient ressembler à ceci :

Un pentagone régulier



Un hexagone régulier

2. Les deux ingrédients : formule d'Euler et courbure gaussienne

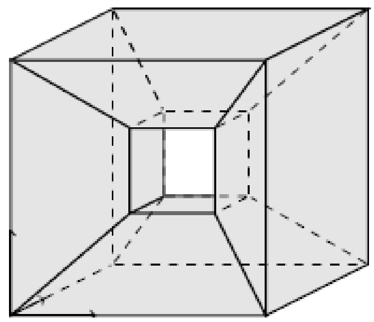
La construction d'objets en origami repose sur l'utilisation de la formule d'Euler et de la courbure gaussienne. Ces deux quantités sont étudiées en détail par un autre groupe. Vous pourrez discuter avec eux pour avoir plus d'informations. Ici, nous allons juste les rappeler.

2.1. La formule d'Euler. — Cette formule due à Euler relie le nombre d'arêtes A, de sommets S et de faces F d'un polyèdre (orientable) avec potentiellement g trous. Elle est donnée par :

$$F + S - A = 2 - 2g.$$

On voit que pour un polyèdre sans trous, la somme fait deux.

1. Faire quelques tests simples avec les polyèdres réguliers.
2. Faire un cas avec un polyèdre avec un trou !



2.2. Courbure gaussienne ou défaut angulaire. — En chaque sommet, on peut regarder à quel point la surface construite est proche d'une structure plane. Une manière de le faire est de regarder comment la structure se déplie. Voila un petit dessin expliquant ce qu'il faut comprendre par là :

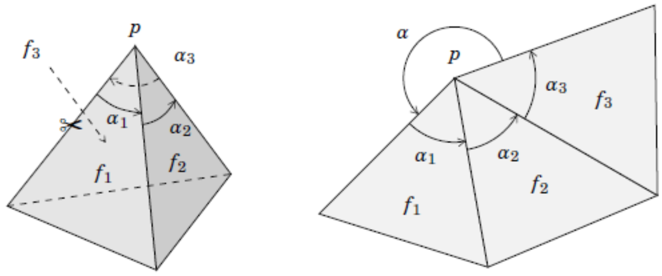


FIGURE 5 – Dépliage d'un tétraèdre (privé de sa face inférieure) autour du sommet p. La face f_3 est située derrière le tétraèdre. Le dépliage se fait le long des arêtes $f_1 \cap f_2$ et $f_2 \cap f_3$ et la découpe le long de l'arête $f_1 \cap f_3$ (symbole ✂). Au sommet p, le défaut angulaire $\alpha = 2\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$ mesure ce qui manque au tétraèdre déplié pour faire un tour complet.

Le défaut angulaire a est égal à zéro si et seulement si la surface est plane. Dans le cas où $a > 2\pi$ on parle de sommet hyperbolique et si $a < 2\pi$ de sommets sphérique.

Nous allons faire une représentation de chacun de ces situations en collant des polygones particuliers :

1. Coller trois hexagones.
2. Coller trois pentagones.

3. Coller un octogone avec deux hexagones.

Ces trois configurations vont nous sevir pour la suite.

3. Les Buckyball

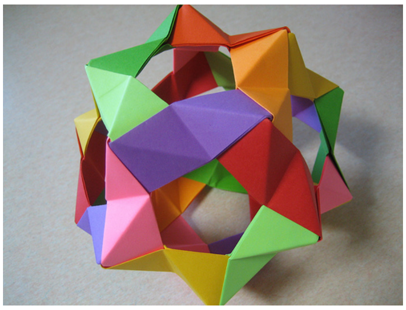
Les unités précédentes permettent de créer beaucoup de polyèdres en pliage. On appelle Buckyball un polyèdre convexe trivalent, c'est à dire que de chaque sommet partent trois arêtes, et dont les faces sont des pentagones et des hexagones réguliers. Ce type particulier de polyèdre a été étudiée par l'architecte Richard Buckyminster Fuller dans les année 40.

3.1. Premier résultat de structure. — La formule d'Euler va nous permettre de préciser la structure de ces objets. On note x le nombre de pentagones et y le nombre d'hexagones d'un buckyball.

1. Donner en fonction de x et y le nombre de faces, de sommets et d'arêtes.
2. En utilisant la formule d'Euler, déterminer les contraintes sur x et y pour avoir un buckyball.

Nous allons maintenant explorer avec ces contraintes la forme de différents buckyballs.

3.2. Le dodécaèdre régulier. — Comme nous l'avons vu, l'exemple le plus simple de buckyball est celui constitué de 12 pentagones réguliers appelé dodécaèdre régulier qui ressemble à ceci :



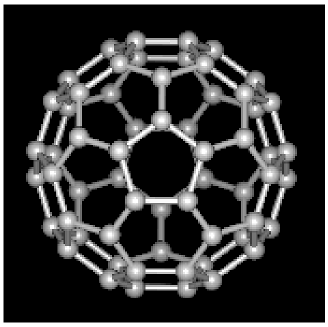
Comme on peut le voir, il n'est pas très rond et on aimerait le rendre le plus sphérique possible. Nous allons avoir besoin du deuxième ingrédients de ces constructions : le calcul de la courbure. On pourra discuter à l'occasion avec le groupe chargé d'étudier ces notions en detail.

3.3. Le ballon de football. — Comme nous le disions ci-dessus, pour avoir un polyèdre plus sphérique il faut augmenter la courbur pour qu'elle se rapproche de celle d'un plan, i.e. de 360^o tout en étant strictement inférieur.

1. Calculer la courbure lorsqu'on colle trois pentagones.
2. Calculer la courbure lorsqu'on colle trois hexagones.
3. En déduire la configuration optimale.
4. Calculer le nombre d'hexagones nécessaires pour la construction.

Vous avez dû obtenir une configuration de 12 pentagones et 20 hexagones. Lorsque vous l'aurez construit, le buckyball ressemblera cette fois à ça :

Il se trouve que mis à part le ballon de football que vous connaissez bien, la molécule de carbonne 60 possède exactement la même structure. La voila :

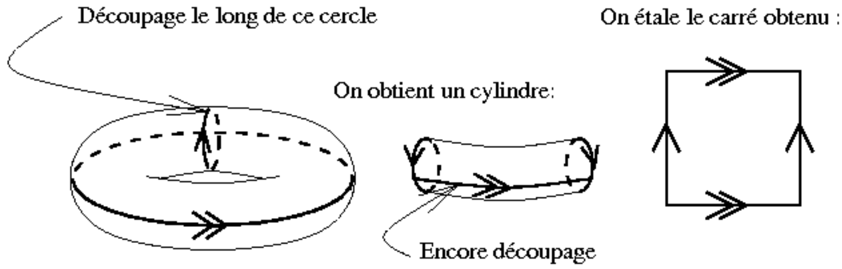


On peut évidemment modifier la construction précédente pour obtenir des buckyball de plus grand diamètre.

1. Comment feriez-vous ?

4. Premier pas vers les surfaces à trous : le tore

Nous allons maintenant construire un objet plus compliqué : un tore, c'est à dire une bouée ! La construction est la suivante :



Pour comprendre la construction, nous allons suivre la découpe précédente. Dans un premier temps, nous allons faire un tube. C'est assez simple. Il suffit de faire un morceau de plan et de recoller les deux côtés. Comme nous l'avons vu, pour faire une surface plane, on peut recoller des hexagones entre eux. Mais le tube que nous avons ainsi construit n'est pas courbé. Pour le courber, on doit changer la courbure en certains sommets pour faire que celle-ci soit plus grande que 360^o. Vous pouvez donc tester en inserrant un heptagone pour voir l'effet sur le tube.

Nous en arrivons à notre problème : construire le tore. On sait qu'il faut des hexagones, des pentagones et aussi des heptagones pour modifier la courbure.

Là encore, c'est la formule d'Euler qui va nous aider. On note x, y, z le nombre de pentagones, d'hexagones et d'heptagones respectivement.

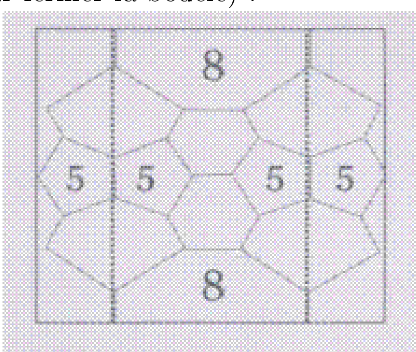
1. Calculer le nombre de faces, de sommets et d'arêtes en fonction de x, y, z.
2. En utilisant la formule d'Euler, établir la contrainte pour un objet de genre 1.
3. En déduire une configuration possible d'assemblage.

L'objet sera sans doute difficile à construire pendant la période du projet, mais dans une des configurations, cela donne ça :

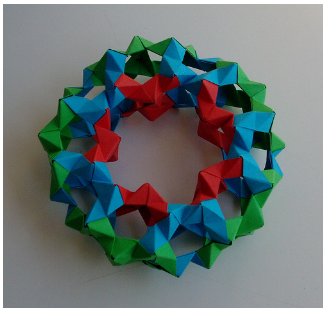
On peut modifier cette construction qui demande tout de même beaucoup de pliages (357 pliages exactement !). Une variante a été proposée par Sarah Marie Belcastro, mathématicienne, utilisant cette fois non pas des heptagones mais des octogones. Dans ce cas, les formules précédentes changent.

1. Refaire les calculs précédents dans le cas d'un mélange de pentagones, d'hexagones et d'octogones.
2. En déduire un patron possible pour le tore.

Avec un peu de travail, vous avez dû parvenir au patron suivant (que l'on doit répéter 4 fois pour fermer la boucle) :



Le résultat est un tore, un peu moins lisse que le précédent, mais bel et bien une surface de genre 1.



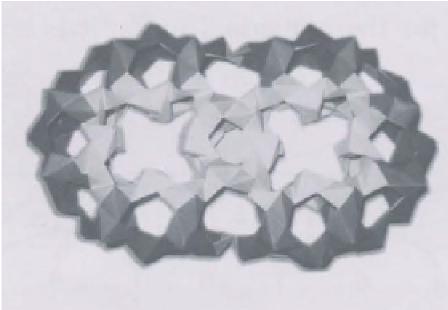
5. Vers les surfaces de genre 2

On peut maintenant franchir le pas et se demander comment construire une surface de genre 2. Les genres supérieurs seront aussi possibles de la même façon. La formule d'Euler donne les contraintes et la courbure gaussienne indique les endroits où rajouter les éléments de changement de courbure.

Nous allons supposer ici que nous voulons donc construire une surface de genre 2 en utilisant seulement des pentagones, des haxagones et des octogones. Le but est de fabriquer un tore de genre 2 qui ressemble à ça :

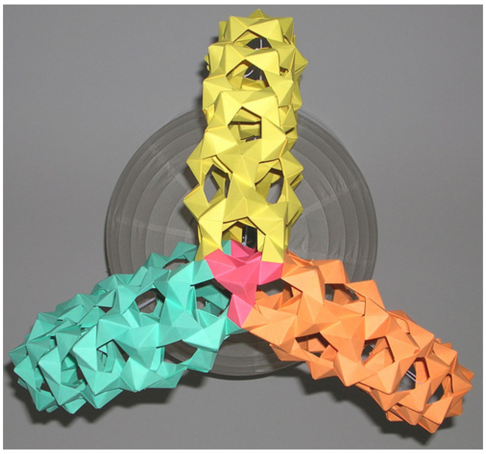
1. En utilisant Euler, trouver les contraintes entre les différents éléments.
2. En utilisant le modèle de Sarah Marie Belcastro, faire un patron d'un tore à deux trous.

Lorsque vous aurez fini, vous devriez obtenir un objet de la forme suivante :



6. Plus loin ?

On peut se demander si il est possible de construire des surfaces encore plus compliquées. La réponse est oui. En voila deux exemples....juste pour les yeux :



On peut aussi par exemple trouver des moyens de faie une bouteille de Klein qui est un exemple de surface non orientable. En voila une image :

Comment feriez-vous ?

Références

Ce projet est basé sur de nombreuses lectures mais parmi celles-ci, l'essentiel se trouve dans l'excellent projet suivant :

– Objets en 3D et origami : buckyball, tube et anneau, Projet du collège George Chepper, Nancy.

On trouve aussi d'autres références qui vont dans la même direction et proposent des développements :

– Pascal Romon, Introduction à la géométrie différentielle discrète, Ellipses, 2013.

– Violeta Vasilevska, Euler's formula and origami torus, 2009.
– Lee Jian Le, Lim Jia Wei, Lu Yongquan, Large PHiZZy Donuts and Cola Modelling Surfaces with Modular Origami, Mathematical Medley D Volume 34 No. 1 May 2008.