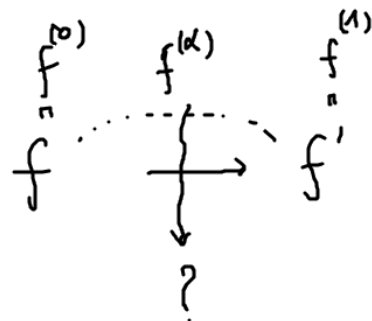


Lecture 1.

Calcul fractionnaire.

idée: Leibniz



Question A: On se donne un opérateur différentiel
(Approximation d'opérateurs)

$$f \longmapsto D(f)$$

$\exists$ une famille à un paramètre D^α , $\alpha \in [0, 1]$
telle que $D^0 = \text{id}$ et $D^1 = f'$?

Question B. Il existe dans la nature (dans les mathématiques)
des courbes qui ne sont pas lisses
(mesure d'irrégularité / géométrie)

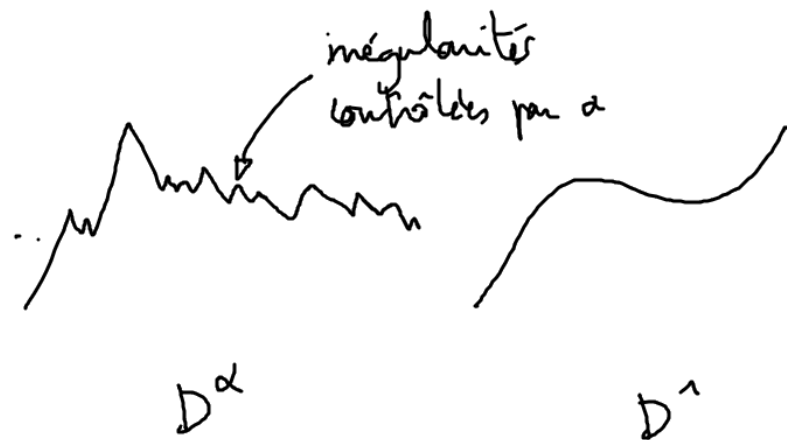


(ex: Mvt. Brownien).

On ne sait pas calculer de dérivées sur ces fonctions.

Peut-on définir une notion généralisée de dérivée telle que si la courbe est dérivable $\Rightarrow D^1[f] = f'$ et sinon, plus la courbe est compliquée, plus l'ordre de dérivation

s'éloigne de 1.



$D^0 = \text{id.}$

Essentiellement, on a deux généralisations classiques du calcul différentiel usuel:

- Calcul fractionnaire de Riemann-Liouville
- Calcul fractionnaire de Caputo
- [- Calcul fractionnaire de Grunwald-Letnikov]

Question A

Applications:

* Question A $\rightsquigarrow$ objet théorique D^α

le fait d'avoir un paramètre libre
qui est $\alpha \rightarrow$ permet d'augmenter
les possibilités de résolution
des équations diff. / intégrale

(Exemple d'Abel).

* permet de faire de la réduction de modèle

$\rightarrow$ modèle $(a_1, \dots, a_n)$ $\rightsquigarrow$ modèle $(a_1, \dots, a_k)$

$\left. \begin{array}{c} \text{diff. /} \\ \text{intég.} \end{array} \right\} \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{paramètre}} \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{interprétation physique claire}}$

α
Fract. $\underbrace{\left(k \ll n \right)}_{\text{réduction.}}$
 $\left. \begin{array}{c} \text{substitut} \rightsquigarrow \text{pas forcément} \\ \text{de signification physique} \end{array} \right\}$

* Question B

→ * lorsque les solutions d'un problème physique sont irrégulières

* aléatoire / échelles

rechercher des modèles directement fractionnaire → le coeff. de dérivation frac. doit avoir une signification !

① Préliminaires sur les intégrales et les dérivées.

$I = [a, b]$, $b > a$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}^d$ suff. régulière.

On note

$$I_{a,+}^1[f](t) = \int_a^t f(s) ds \quad (I) \quad , \quad \frac{d}{dt} (I_{a,+}^1[f])(t) = f(t)$$

primitive de f qui s'annule en a .

$$I_{a,+}^k = I_{a,+}^1 \circ \dots \circ I_{a,+}^1 \quad (II) \quad I_{a,+}^1[f'](t) = f(t) - f(a)$$

On note

$$k \in \mathbb{N}^*$$

(I), (II)
Thm. fondamental du
calcul différentiel.

Ex:

$$I_{a,+}^2 [f](t) = \int_a^t \left(\int_a^s f(u) du \right) ds$$

Remarque: $I_{a,+}^k$ est une intégrale itérée.

On peut montrer le résultat suivant:

$$(*) \quad I_{a,+}^k [f](t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_a^t (t-u)^{k-1} f(u) du$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\text{Ex:}} \quad I_{a,+}^2[f](t) &= \int_a^t \left(\int_a^s f(u) \, du \right) ds \\
 &\stackrel{\text{par Fubini}}{=} \int_a^t \underbrace{\left(\int_u^t ds \right)}_{(t-u)} f(u) \, du \\
 &= \int_a^t (t-u) f(u) \, du
 \end{aligned}$$

Par récurrence, on en déduit la formule générale.
 et
 Fubini

On appelle $I_{a,+}^k$ l'intégrale à gauche d'ordre k et de borne inférieure a .

Pourquoi à gauche ? La quantité $I_{a,+}^k[f](t)$ dépend des valeurs pour $a \leq s \leq t$.

On peut donner une définition plus algébrique.

L'intégrale à gauche d'ordre k et de borne inférieure a est l'unique solution g du problème: $\forall 0 \leq n \leq k-1, g^{(n)}(a) = 0$
et $g^{(k)} = f$.

À l'aide de ces intégrales itérées, on peut écrire la dérivée d'ordre k de la façon suivante:

$$(I) \quad \left(\frac{d}{dt} \right)^k [f] = \left(\frac{d}{dt} \right)^{k+1} \left[I_{a,+}^1 [f] \right]$$

$$(II) \quad \left(\frac{d}{dt} \right)^k [f](t) - \left(\frac{d}{dt} \right)^k [f](a) = I_{a,+}^1 \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^{k+1} [f] \right]$$

De la même façon, on peut définir une intégrale d'ordre k à droite de limite supérieure b :

$$I_{b,-}^1 [f](t) = \int_t^b f(s) ds$$

On note $I_{b,-}^k = I_{b,-}^1 \circ \dots \circ I_{b,-}^1$

On démontre alors :

$$(**) \quad I_{b,-}^k [f](t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_t^b (u-t)^{k-1} f(u) du$$

On généralise les relations (I) et (II) :

$$(I) \quad \left(-\frac{d}{dt}\right)^k [f] = \left(-\frac{d}{dt}\right)^{k+1} \left(I_{b,+}^{-1} [f] \right)$$

$$(II) \quad \left(-\frac{d}{dt}\right)^k [f] (a) - \left(-\frac{d}{dt}\right)^k [f] (b) = \\ I_{b,+}^{-1} \left[\left(-\frac{d}{dt}\right)^{k+1} [f] \right] (a)$$

Question: Comment généraliser $I_{a,+}^k$ et $I_{b,-}^k$ pour des $k \in \mathbb{R}^{+,*}$?

On voit sur les formules $(*)$ et $(**)$ que le terme $(t-a)^{k-1}$ ou $(b-t)^{k-1}$ garde un sens pour $k \in \mathbb{R}^{+,*}$ mais le factoriel $\frac{1}{(k-1)!}$ n'est pas défini.

→ idée: Trouver une fonction $\Gamma : \mathbb{R}^{+,*} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\Gamma(n+1) = n!$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Une solution à ce problème a été donnée par Gauss : c'est la fonction Γ définie par : $(***) \forall \alpha > 0, \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$

Propriétés de cette fonction: $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(n+1) = n!$
 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

$$\Gamma(1+\alpha) = \alpha \Gamma(\alpha)$$

$$\forall 0 < \alpha < 1, \quad \Gamma(1-\alpha) \Gamma(\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

Exercices Démontrer les propriétés de la fonction Γ .

On peut donc généraliser les formules (*) et
(**) de la manière suivante:

Definition. $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad I_{a,+}^{\alpha} [f] (t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-z)^{\alpha-1} f(z) dz$
 (intégrale de Riemann-Liouville à droite)

$\forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad I_{b,-}^{\alpha} [f] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (z-t)^{\alpha-1} f(z) dz$
 (intégrale de Riemann-Liouville à gauche).

Remarque: On commence par généraliser la notion d'intégrale
 $\longrightarrow$ c'est elle qui va conduire à la généralisation de la dérivée.

On a :

Théorème . $f \in L^1([a,b])$ et $\alpha > 0$: Alors l'intégrale

$I_{a,+}^\alpha [f](t)$ existe pour presque tout $t \in [a,b]$.

De plus, $I_{a,+}^\alpha [f] \in L^1[a,b]$.

C'est une conséquence des propriétés des espaces $L^1([a,b])$.

On a donc le cas $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, I_{a,+}^n \circ I_{a,+}^m = I_{a,+}^{n+m}$

(propriété de semi-groupe). A-t-on cette propriété pour

$I_{a,+}^\alpha$? oui.

Théorème: Soit $\alpha, \beta \geq 0$ et $f \in L^1([a, b])$ alors

$$I_{a,+}^{\alpha} \circ I_{a,+}^{\beta} = I_{a,+}^{\alpha+\beta}$$

vraie presque partout sur $[a, b]$. Si $f \in C^0([a, b])$
alors l'égalité est vraie partout sur $[a, b]$.

Remarque: $\{ I_{a,+}^{\alpha} : L^1([a, b]) \rightarrow L^1([a, b]); \alpha \geq 0 \}$.

$I_{a,+}^0 := \text{id.}$, semigroupe commutatif pour la loi de
composition (concaténation sur les opérateurs) et l'élément neutre
est $I_{a,+}^0$.

Démonstration.

$$I_{a,+}^{\alpha} \circ I_{a,+}^{\beta} [f](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}$$

$$\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \left(\underbrace{\int_a^t (t-z)^{\beta-1} f(z) dz}_{\in L^1([a,b])} \right) dt$$

=

$$\stackrel{\text{Fubini}}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_a^x f(z) \left(\int_z^x (x-t)^{\alpha-1} (t-z)^{\beta-1} dt \right) dz$$

On fait le changement de variables : $t = z + s(x-z)$.

$$t - z = s (x - z).$$

$$\text{et } x - t = x - z - s (x - z) = (x - z) (1 - s).$$

donc :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha \circ I_a^\beta [f](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_a^x f(z) \left(\int_0^1 ((x-z)(1-s))^{\alpha-1} \right. \\ &\quad \left. \times (s(x-z))^{\beta-1} (x-z) ds \right) dz \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_a^x f(z) (x-z)^{\alpha+\beta-1} \underbrace{\left(\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds \right)}_{(*)} dz \end{aligned}$$

On a (à faire en exercice) :

$$\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

donc :

$$I_{a,+}^{\alpha} \circ I_{a,+}^{\beta} [f] = I_{a,+}^{\alpha+\beta} [f].$$

(au sens L^1) $\rightarrow$ presque partout sur $[a,b]$.

Si $f \in C^0([a,b]) \rightarrow$ on a des intégrales à paramètre $\rightarrow$ on a

$$I_{a,+}^{\alpha} \circ I_{a,+}^{\beta} [f] \in C^0([a,b]) \text{ et } I_{a,+}^{\alpha+\beta} [f] \in C^1([a,b])$$

$\Rightarrow$ fonctions continues qui coïncident presque partout $\rightarrow$ coïncident partout ! $\square$