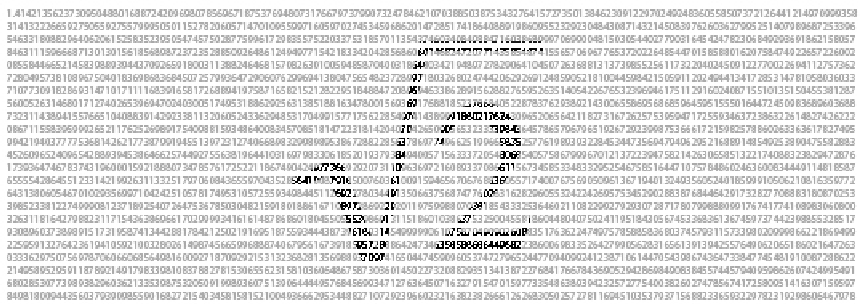
Structure des nombres réels

Partie I - Les fractions continues



Nous allons donner une construction algorithmique d'une approximation d'un nombre réel par des nombres rationnels. Un exemple est celui de la construction d'engrenages respectant certains rapports provenant de données astronomiques pour les horloges. C'est d'ailleurs cette technique que Jean-Baptiste Schwilgué utilisa pour reconstruire en 1842 l'horloge astronomique de la cathédrale de Strasbourg, de même que Christian Huygens pour son automate planétaire représentant le mouvement des planètes autour du soleil. Un autre groupe étudiera une façon alternative d'approximer les nombres réels et nous confronterons les résultats des deux approches.

1. L'algorithme des fractions continues

Soit x un nombre réel. On écrit $x = [x] + \{x\}$ où $[x]$ est un nombre entier (la *partie entière* de x) et $\{x\}$ est un nombre réel dans l'intervalle $[0, 1[$ (la *partie fractionnaire* de x). Une telle décomposition est unique : si x est entier, alors $x = [x]$ et $\{x\} = 0$. Sinon, on a $0 < \{x\} < 1$ et on pose $x_1 = 1/\{x\}$. On recommence avec x_1 ce qu'on vient de faire pour x : on écrit $x_1 = [x_1] + \{x_1\}$. Par hypothèse, on a $[x_1] \geq 1$. De nouveau, si x_1 est entier, on s'arrête et on

écrit
$$x = [x] + \frac{1}{[x_1]},$$
tandis que si x_1 n'est pas entier, on pose $x_2 = 1/\{x_1\}$. En poursuivant, on obtient ainsi l'écriture

$$x = [x] + \frac{1}{x_1} = [x] + \cfrac{1}{[x_1] + \cfrac{1}{x_2}} = [x] + \cfrac{1}{[x_1] + \cfrac{1}{[x_2] + \cfrac{1}{\cdots}}}. \tag{1}$$

Nous allons maintenant manipuler cet algorithme :

1. Calculer le développement en fractions continues de $x = 4,16$.
2. Calculer le développement en fractions continues de $x = \sqrt{2}$.
3. Calculer le développement en fractions continues de e.
4. Calculer le développement en fractions continues de π.

Comme vous le voyez ci-dessus, le développement en fractions continues des nombres réels donne des résultats assez différents. Parfois l'algorithme se termine, parfois non. Pour comprendre ce phénomène, nous allons donner une interprétation géométrique de cet algorithme.

2. Une interprétation géométrique

On prend un rectangle dont les côtés sont 1 et x (en supposant ici $x > 0$). On décompose ce rectangle en le remplissant autant que possible par des carrés de côté 1. Il reste (si x n'est pas entier) un petit rectangle dont les côtés sont 1 et $\{x\}$. On répète le procédé : on remplit ce petit rectangle avec des carrés de côtés $\{x\}$, et s'il reste encore un plus petit rectangle on recommence.

1. Faire cette construction géométrique avec $4,16$.
2. Faire cette construction avec $\sqrt{2}$.

On voit que l'algorithme se termine dans le premier cas et ne semble pas s'interrompre dans le second cas. C'est une propriété importante de cet algorithme et elle est liée au caractère rationnel ou non du nombre dont on est parti. En effet, nous allons montrer :

Théorème 1. — *Le développement en fraction continue d'un nombre réel x est fini si et seulement si ce nombre est rationnel, c'est à dire si il peut s'écrire sous la forme d'une fraction p/q avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.*

Nous allons faire la démonstration de ce résultat :

1. Supposons que la fraction continue est finie. En utilisant (1), en déduire que le nombre dont on est parti est rationnel.
2. Supposons $x = p/q$ rationnel et dilatons la figure géométrique précédente d'un facteur q. On obtient ainsi un rectangle dont les côtés sont de longueur p et q. Faire la construction précédente sur ce nouveau rectangle. Qu'observez-vous ? Pourquoi est-on sûr que l'algorithme va s'arrêter ?

On vient donc de trouver une manière assez jolie de séparer les nombres rationnels de ceux qui ne le sont pas par une caractérisation de leur fraction continue. Nous allons en profiter pour faire une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ de plusieurs façons différentes : directe via une astuce, géométrique et arithmétique.

3. Sur l'irrationalité de $\sqrt{2}$

3.1. Démonstration directe. —

1. Démontrer que
$$1 + \sqrt{2} = 2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}.$$
2. En déduire le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$.
3. Conclure.

3.2. Démonstration géométrique. — Elle se fait par l'absurde. On considère un rectangle de côtés $a + b$ et b tels que $\sqrt{2} = a/b$.

1. Remarquer que ce rectangle peut être décomposé en deux carrés de côtés b et un rectangle de côtés b et $a - b$.
2. Remarquer que le nouveau petit rectangle a les mêmes proportions que le premier, c'est-à -dire
$$\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a-b}.$$

3. Conclure.

3.3. Démonstration arithmétique. — Elle se fait aussi par l'absurde. On suppose que $\sqrt{2}$ est un rationnel. On l'écrit $\sqrt{2} = a/b$ avec b l'entier positif le plus petit possible et a un entier.

1. Démontrer que $b < a < 2b$.
2. Démontrer que
$$\sqrt{2} = \frac{2b - a}{a - b}.$$
3. Montrer que $0 < a - b < b$ et conclure.

4. Irrationalité du nombre d'or

Le nombre d'or intervient dans de nombreux domaines des mathématiques et son ubiquité dans la nature, par exemple dans la fleur de Tournesol ou encore la pomme de pin, lui a conféré un statut particulier ce qui lui a valu le surnom de "divine proportion". Le nombre d'or noté Φ est égal à
$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$
Nous allons démontrer qu'il est irrationnel en suivant ce que nous avons fait pour $\sqrt{2}$.

1. Démontrer que
$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}.$$
2. Conclure.

La démonstration géométrique est intéressante car elle fait apparaître le principe de construction du rectangle d'or qui a souvent été utilisé en architecture, en peinture, dans l'automobile pour donner des édifices ou objets harmonieux. C'est cette idée qui a conduit à qualifier le nombre d'or de "divine proportion".

5. Irrationalité de e

L'irrationalité de e fut démontrée par Leonhard Euler en 1748 en utilisant la théorie des fractions continues. Nous n'allons pas faire la démonstration rigoureuse de ce résultat mais plutôt suivre la démarche d'Euler en émettant deux conjectures sur le développement en fraction continue de e.

1. Calculer les 10 premiers termes du développement en fraction continue de
$$\frac{e-1}{2}.$$
2. Conjecture ?
3. Calculer les 10 premiers termes du développement en fraction continue de
$$e-2.$$
4. Conjecture ?

Il se trouve que les deux calculs précédents sont faits par Euler et qu'il conclut directement à l'irrationalité de e. La démonstration est en fait assez technique mais on démontre bien que les deux conjectures précédentes sont vraies !