

Structure des nombres réels

Partie I - Les fractions continues

1,41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667072709072347846210703885038753432764157273501384623091220702402489605585073721264412144070990378
3141322366592750559275579995050115278206057147010955907160507027453459686201472851741864088919890552329230484308714321450839762603627005251407989687253396
5463180882944062615258352305054745750287599617208355752303753185701135422162244240104714232920990706900481503054402770031645424782306840203691862158057
8463111596648713013015618588887272325288500264861244407715421833420428566666018574777142575477115545706967785372022648544701585891620758404923657224002
08584465214532988939443700265918003113834646815788230100594850700691894415421184807270206410460726368013137346525611222040345891227000269411237352
726049573108967504018369883684507257983647200607209694138047565482372809180326802474420529269124859052181004459842150591202404413417285314781058836033
71077309182869314701171168391658172688041975871658215212822951848847208463386289156288276595263514054226765323969461751129160240871551013515045381287
5600526314680171274026539494702403005174053188520256313851881634780015606917688185279664052287837629802143006558605686850645951555016447245098368603688
723114380415576651940883914292338113206052433629485317049915771756228542011430091188021762420965206564211827316726257539594717255934637238622614827426222
087115339599926521176252698917549081592481400834370851810722318142040201262100512223394445786579679451024720239987536661721592057886003233617627496
94210403777536814262177307909194551307231274066889209895867288228583116077494625199459357576198939323845344735647940629521688914854025380457582883
452609652406542889304538646625744027556381964410916079823061852010379848005715633372058906940575867999670121372239475821426306585132217408832820472876
17939467467837431060015921888073478576172522118674004240726612020731109636072160803270861156734585334832396254675851644710757848602463600834449114818587
6555428645512314210028311323517970608436550704521584180701500760810091594656706768286557174007675699500613671040132403560524018599910506210816250772
84313040546701002549971042425165781746310572539396442113622790341072591637588771005162306055224236557546290288376848621971232730883180670253
368523812274909081237189254072647536785030482159180186167109724692200119750988010381854333253646021108229027920307287178079988890917674174108963060800
326311816427988231171543638696617029999341616148786860180455105523869121151860103827532500455818604480407502411951843056745338836136745972744239855228517
930806373868915173195874134428817842125021916951875592444387376184145400999061675840400008351763623474075785885836803745793115733080200986621864900
229591327642361941159210332602614687456659948887406795616739180573818842473435858691440682386006083352642799465283165613913042557676902065186021647263
02330375075497876046686854408144002718709292153132368281266981700916508474599965547279622447769409024123807161447954308674264723847454819100878822
214058952059118789214017983308108278827815396556231581036064867587305601450227320882955134138722768417667843600529428694006384557445794095962607424095491
680285307739893829603621335308753205091988036075139066444495768456903471276364650716327015470159773354843803942325727540038260274785674172580051416307159597
840818009443560379390985590168272154034581581100406666295344882710729230660232163823826661262883050527278116945103537927156882336593229782319289606447078

Nous allons donner une construction algorithmique d'une approximation d'un nombre réel par des nombres rationnels. Un exemple est celui de la construction d'engrenages respectant certains rapports provenant de données astronomiques pour les horloges. C'est d'ailleurs cette technique que Jean-Baptiste Schwilgué utilisa pour reconstruire en 1842 l'horloge astronomique de la cathédrale de Strasbourg, de même que Christian Huygens pour son automate planétaire représentant le mouvement des planètes autour du soleil. Un autre groupe étudiera une façon alternative d'approximer les nombres réels et nous confronterons les résultats des deux approches.

1. L'algorithme des fractions continues

Soit x un nombre réel. On écrit $x = [x] + \{x\}$ où $[x]$ est un nombre entier (la *partie entière* de x) et $\{x\}$ est un nombre réel dans l'intervalle $[0, 1[$ (la *partie fractionnaire* de x). Une telle décomposition est unique : si x est entier, alors $x = [x]$ et $\{x\} = 0$. Sinon, on a $0 < \{x\} < 1$ et on pose $x_1 = 1/\{x\}$. On recommence avec x_1 ce qu'on vient de faire pour x : on écrit $x_1 = [x_1] + \{x_1\}$. Par hypothèse, on a $[x_1] \geq 1$. De nouveau, si x_1 est entier, on s'arrête et on

écrit

$$x = [x] + \frac{1}{[x_1]},$$

tandis que si x_1 n'est pas entier, on pose $x_2 = 1/\{x_1\}$. En poursuivant, on obtient ainsi l'écriture

$$(1) \quad x = [x] + \frac{1}{x_1} = [x] + \frac{1}{[x_1] + \frac{1}{x_2}} = [x] + \frac{1}{[x_1] + \frac{1}{[x_2] + \frac{1}{\dots}}}.$$

Nous allons maintenant manipuler cet algorithme :

1. Calculer le développement en fractions continues de $x = 4, 16$.
2. Calculer le développement en fractions continues de $x = \sqrt{2}$.
3. Calculer le développement en fractions continues de e .
4. Calculer le développement en fractions continues de π .

Comme vous le voyez ci-dessus, le développement en fractions continues des nombres réels donne des résultats assez différents. Parfois l'algorithme se termine, parfois non. Pour comprendre ce phénomène, nous allons donner une interprétation géométrique de cet algorithme.

2. Une interprétation géométrique

On prend un rectangle dont les côtés sont 1 et x (en supposant ici $x > 0$). On décompose ce rectangle en le remplissant autant que possible par des carrés de côté 1. Il reste (si x n'est pas entier) un petit rectangle dont les côtés sont 1 et $\{x\}$. On répète le procédé : on remplit ce petit rectangle avec des carrés de côtés $\{x\}$, et s'il reste encore un plus petit rectangle on recommence.

1. Faire cette construction géométrique avec 4, 16.
2. Faire cette construction avec $\sqrt{2}$.

On voit que l'algorithme se termine dans le premier cas et ne semble pas s'interrompre dans le second cas. C'est une propriété importante de cet algorithme et elle est liée au caractère rationnel ou non du nombre dont on est parti. En effet, nous allons montrer :

Théorème 1. — *Le développement en fraction continue d'un nombre réel x est fini si et seulement si ce nombre est rationnel, c'est à dire si il peut s'écrire sous la forme d'une fraction p/q avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.*

Nous allons faire la démonstration de ce résultat :

1. Supposons que la fraction continue est finie. En utilisant (1), en déduire que le nombre dont on est parti est rationnel.
2. Supposons $x = p/q$ rationnel et dilaton la figure géométrique précédente d'un facteur q . On obtient ainsi un rectangle dont les côtés sont de longueur p et q . Faire la construction précédente sur ce nouveau rectangle. Qu'observez-vous ? Pourquoi est-on sûr que l'algorithme va s'arrêter ?

On vient donc de trouver une manière assez jolie de séparer les nombres rationnels de ceux qui ne le sont pas par une caractérisation de leur fraction continue. Nous allons en profiter pour faire une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ de plusieurs façons différentes : directe via une astuce, géométrique et arithmétique.

3. Sur l'irrationalité de $\sqrt{2}$

3.1. Démonstration directe. —

1. Démontrer que

$$1 + \sqrt{2} = 2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}.$$

2. En déduire le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$.
3. Conclure.

3.2. Démonstration géométrique. — Elle se fait par l'absurde. On considère un rectangle de côtés $a + b$ et b tels que $\sqrt{2} = a/b$.

1. Remarquer que ce rectangle peut être décomposé en deux carrés de côtés b et un rectangle de côtés b et $a - b$.
2. Remarquer que le nouveau petit rectangle a les mêmes proportions que le premier, c'est-à-dire

$$\frac{a + b}{b} = \frac{b}{a - b}.$$

3. Conclure.

3.3. Démonstration arithmétique. — Elle se fait aussi par l'absurde. On suppose que $\sqrt{2}$ est un rationnel. On l'écrit $\sqrt{2} = a/b$ avec b l'entier positif le plus petit possible et a un entier.

1. Démontrer que $b < a < 2b$.
2. Démontrer que

$$\sqrt{2} = \frac{2b - a}{a - b}.$$

3. Montrer que $0 < a - b < b$ et conclure.

4. Irrationalité du nombre d'or

Le nombre d'or intervient dans de nombreux domaines des mathématiques et son ubiquité dans la nature, par exemple dans la fleur de Tournesol ou encore la pomme de pin, lui a conféré un statut particulier ce qui lui a valu le surnom de "divine proportion". Le nombre d'or noté Φ est égal à

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Nous allons démontrer qu'il est irrationnel en suivant ce que nous avons fait pour $\sqrt{2}$.

1. Démontrer que

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}.$$

2. Conclure.

La démonstration géométrique est intéressante car elle fait apparaître le principe de construction du rectangle d'or qui a souvent été utilisé en architecture, en peinture, dans l'automobile pour donner des édifices ou objets harmonieux. C'est cette idée qui a conduit à qualifier le nombre d'or de "divine proportion".

5. Irrationalité de e

L'irrationalité de e fut démontrée par Leonhard Euler en 1748 en utilisant la théorie des fractions continues. Nous n'allons pas faire la démonstration rigoureuse de ce résultat mais plutôt suivre la démarche d'Euler en émettant deux conjectures sur le développement en fraction continue de e .

1. Calculer les 10 premiers termes du développement en fraction continue de

$$\frac{e - 1}{2}.$$

2. Conjecture ?
3. Calculer les 10 premiers termes du développement en fraction continue de

$$e - 2.$$

4. Conjecture ?

Il se trouve que les deux calculs précédents sont faits par Euler et qu'il conclut directement à l'irrationalité de e . La démonstration est en fait assez technique mais on démontre bien que les deux conjectures précédentes sont vraies !
