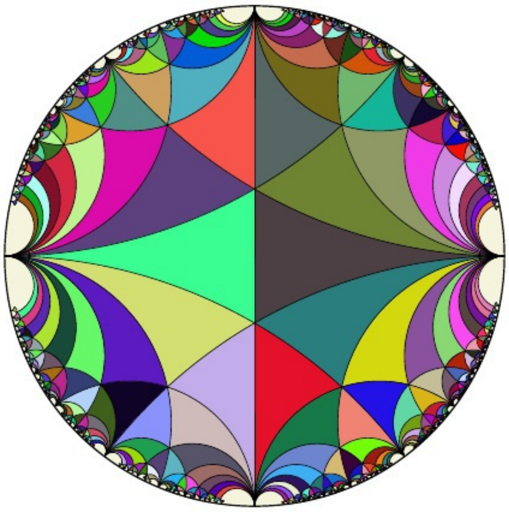
Structure des nombres réels

Partie III - Suites de Farey, cercles de Ford et approximation



Le but de cette partie est de donner une représentation géométrique des suites de Farey étudiées par le groupe de la partie II. Cette représentation fait apparaître une figure géométrique fractale et donne une nouvelle façon de concevoir l'organisation des rationnels et des irrationnels. Une seconde représentation nous fera mieux sentir la relation intime de ces constructions avec le problème de l'approximation des nombres réels par des rationnels.

1. Cercles de Ford

Les cercles de Ford ont été introduits par le mathématicien américain Lester Randolph Ford (1886-1975) en 1917. La définition est la suivante :

Définition 1. — *À chaque fraction dont la forme irréductible est p/q on associe le cercle de centre* $\left(\dfrac{p}{q}, \dfrac{1}{2q^2}\right)$ *et de rayon* $\dfrac{1}{2q^2}$.

Nous allons voir que ces cercles possèdent des propriétés étonnantes.

1. Sur une même figure, tracer les cercles de Ford des fractions $0/1$, $1/1$, $1/2$, $1/3$ et $2/3$.
2. Qu'observez-vous ?

Pour mieux comprendre l'architecture des cercles de Ford, on voit qu'il faut organiser les fractions suivant leurs dénominateurs, car c'est eux qui déterminent la taille des cercles. Plus ce dénominateur est grand et plus le cercle associé est petit. On est donc naturellement conduit à une construction donnée par John Farey, un géologue anglais en 1816 et qui suggéra de ranger dans l'ordre croissant les fractions irréductibles comprises entre 0 et 1 et dont le dénominateur ne dépasse pas une valeur donnée.

2. Les suites de Farey

On commence par une définition :

Définition 2. — *Pour $n \geq 1$, la n-ième suite de Farey, est la suite, rangée dans l'ordre croissant, des fractions irréductibles comprises entre* 0 *et* 1*, dont le dénominateur ne dépasse pas n. On note F_n cette suite.*

On aura par exemple

$$F_1 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\} \quad \text{et} \quad F_2 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\}.$$

1. Déterminer F_3, F_4, F_5 et F_6.
2. Que remarquez vous sur la position de la fraction $1/2$?
3. Prendre trois termes consécutifs d'une suite. Quelle relation pouvez-vous trouver ?
4. Soient a/b et c/d deux fractions consécutives de F_n. Comment pouvez-vous écrire la fraction intercalée qui apparaît dans une suite de Farey ultérieure ?

Vous devez maintenant avoir un ensemble de conjectures sur les suites de Farey et ce sont ces conjectures que nous allons maintenant démontrer complètement.

1. Démontrer que si la fraction a/b appartient à F_n alors la fraction $1-(a/b)$ appartient aussi à F_n.
2. En déduire que $1/2$ est toujours en position médiane dans une suite de Farey.

Une propriété qui nous sera utile :

Lemme 1. —
Soient a/b et c/d deux fractions consécutives de F_{n+1} alors l'une au moins de ces fractions appartient à F_n.

1. Le vérifier sur les exemples précédents.
2. Supposons que les deux fractions appartiennent à F_{n+1} et pas à F_n. Comment s'écrivent ces fractions ?
3. Trouver un élément de F_n entre les deux fractions précédentes.
4. Conclure.

Nous allons supposer pour la suite le résultat suivant : soient a/b et c/d deux fractions consécutives d'une suite de Farey F_n alors $bc - ad = 1$.

1. Vérifier l'égalité précédente dans des exemples.
2. Soient a/b, e/f et c/d trois fractions consécutives dans une suite de Farey F_n. En utilisant la relation précédente, montrer que
$$\frac{e}{f} = \frac{a+c}{f+d}.$$

Le résultat précédent donne une manière algorithmique de fabriquer les suites de Farey. Il suffit, à partir de deux fractions consécutives a/b et c/d de F_n de fabriquer la fraction médiane $(a+b)/(c+d)$. Si celle-ci a un dénominateur plus petit où égal à $n+1$ elle appartient à F_{n+1} sinon elle appartient à un F_k avec $k > n+1$.

1. Appliquer cet algorithme pour fabriquer les suites de Farey F_i, $i = 1, \ldots, 6$.

Munis de ce procédé algorithmique, nous sommes aussi en mesure de proposer une construction algorithmique des cercles de Ford. On va les construire par récurrence sur n en les organisant suivant les suites de Farey.

1. Faire plusieurs images expliquant la construction algorithmique des cercles de Ford.

3. Propriétés des cercles de Ford

L'image que l'on obtient en faisant la construction des cercles de Ford suggère quelques conjectures que nous allons démontrer. Les conjectures sont les suivantes :

- Tous les cercles de Ford sont tangents à l'axe des abcisses.
- Les cercles de Ford associés à deux fractions consécutives d'une même suite de Farey sont tangents entre eux.
- On a la réciproque du résultat précédent : si deux cercles de Ford sont tangents entre eux alors ils correspondent à deux fractions consécutives d'une même suite de Farey.

Pour la première conjecture :

1. Calculer la distance du centre du cercle de Ford associé à un rationnel p/q.
2. Conclure.

Pour la seconde conjecture :

1. Soient $x = a/b$ et $y = c/d$ deux fractions consécutives d'une même suite de Farey et C_x et C_y les deux cercles de Ford associés. Calculer la distance entre les centres de C_x et C_y.
2. Comparer aux rayons de C_x et C_y.
3. Conclure.

La troisième conjecture est plus délicate à établir.