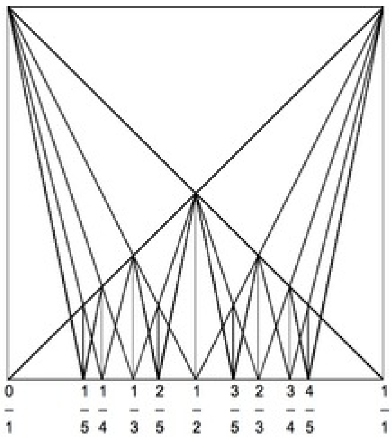
Structure des nombres réels

Partie II - Suites de Farey, horloges et calendriers



Deux problèmes vont nous occuper dans ce projet :

- celui de la construction d'un calendrier qui ne se décale pas trop au cours du temps.
- celui de la construction d'une horloge.

Dans les deux cas, on va être amené à chercher une approximation rationnelle d'un nombre réel, mais seulement avec des fractions dont le dénominateur n'est pas trop grand. Un autre groupe construira sans limitation sur les dénominateurs des approximations rationnelles des nombres réels. On pourra en fin de projet comparer les deux approches en pratique.

1. Les suites de Farey

La définition des suites de Farey se fait par récurrence :

On commence par noter les deux fractions 0/1 et 1/1 qui constituent la suite de Farey de profondeur 1 (les dénominateurs des deux fractions sont égaux à 1) notée $\mathcal{F}_1$. On construit alors la suite de profondeur 2 de la manière suivante

: on intercale entre les deux fractions précédentes la fraction $\dfrac{0+1}{1+1} = 1/2$. On a donc

$$\mathcal{F}_2 = \{0, 1/2, 1\}\,. \tag{1}$$

On passe ensuite de la suite de Farey $\mathcal{F}_n$ à la suite de Farey $\mathcal{F}_{n+1}$ de la façon suivante :

Soit a/b et c/d deux fractions consécutives dans la suite de Farey $\mathcal{F}_n$. On intercale dans cette suite le nombre dit *médian* défini par

$$\frac{a+c}{b+d}. \tag{2}$$

1. Calculer les suites de Farey $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_4$ et $\mathcal{F}_5$.
2. Calculer pour chaque fraction consécutive dans les suites de Farey $\mathcal{F}_i$, $i = 1, 2, 3$.
3. En déduire la formule pour l'écart entre deux fractions consécutives d'une suite de Farey.

2. L'arbre de Stern-Brocot

On peut représenter l'ensemble des suites de Farey à l'aide d'un arbre (binaire) appelé *arbre de Stern-Brocot*. On dispose pour cela sur une même ligne les éléments $0/1$ et $1/0$ représentant formellement l'infini. Sur la ligne du dessous on place au milieu de deux éléments consécutifs la fraction médiane reliée par l'élément de la ligne précédente qui lui a donné naissance.

1. Faire les premières étapes de l'arbre.
2. Représenter cet arbre.

On voit que toute fraction peut être obtenue à partir du haut de l'arbre en descendant le long des branches et en tournant à droite ou à gauche. Si on note G pour un déplacement à gauche et D pour un déplacement à droite, on peut coder une fraction de l'arbre par un mot constitué de G et D représentant le chemin qu'il faut parcourir en partant d'un point de l'arbre. Par exemple, en partant de $0/1$ on obtient $1/3$ en faisant D puis G soit le mot DG.

1. Soit p/q un élément de l'arbre. Que peut-on dire des fractions qui sont engendrées par son fils de gauche ?
2. Même question pour son fils de droite ?

3. Une méthode d'approximation

On se donne maintenant un nombre $x \in [0,1]$ dont on connaît un encadrement par deux fractions consécutives d'un certain $\mathcal{F}_n$ a/b et c/d. L'erreur d'approximation est de l'ordre de $1/bd$. On peut chercher une nouvelle approximation de x en calculant la fraction médiane de a/b et c/d, c'est à dire $(a+c)/(c+d)$. On calcule alors l'erreur d'approximation $x-(a+c)/(c+d)$ pour savoir si cette fraction est au dessus ou en dessous de x. Si l'erreur est positive on recommence la procédure avec a/b et $(a+c)/(c+d)$ et sinon avec $(a+c)/(c+d)$ et c/d. On effectue cette opération tant que l'on n'a pas atteint la précision voulue.

1. Appliquer cette procédure avec $x = 1/\sqrt{2}$ et comme encadrement de départ $0 < x < 1$. On s'arrêtera lorsque la taille du dénominateur sera plus grande que 20. Indiquer vos résultats dans un tableau.
2. Comparer ce résultat avec l'approximation donnée par l'algorithme des fractions continues (voir le groupe étudiant cet algorithme).
3. Interpréter la méthode à l'aide de l'arbre de Stern-Brocot.

4. Pourquoi rajouter ou enlever des jours aux calendriers ?

Nous allons discuter deux types de calendriers : ceux qui sont basés sur l'année solaire et ceux basés sur le mois lunaire.

4.1. Calendrier solaire. — Les calendriers solaires sont basés sur le nombre de jours dans une année tropique[1] qui est d'environ $a = 365,242199\ldots$

[1]Définition donnée par l'IMCCE : Année tropique moyenne: Antérieurement, l'année tropique moyenne était définie comme l'intervalle de temps séparant deux passages du Soleil à l´équinoxe moyen de printemps. Cette ancienne définition privilégiait un point particulier de l'orbite. De nos jours l'année tropique moyenne est le temps que met le barycentre Terre-Lune pour faire une révolution autour du Soleil dans un repère tournant lié à la ligne des

jours. Ce nombre n'est pas entier et il est donc nécessaire d'en obtenir une approximation rationnelle pour fabriquer un calendrier.

1. Calculer les approximations de Farey de $a - 365$.
2. On peut interpréter l'approximation $1/4$ comme le besoin de rajouter un jour tous les quatre ans. Comment interpréter l'approximation $6/25$?
3. En remarquant que $6/25 = 1/4 - 1/100$ donner une nouvelle façon de corriger le calendrier de 365 jours.

4.2. Calendrier lunaire. — Un calendrier lunaire est basé sur le nombre de jours dans une lunaison et se compose de douze mois lunaire soit environ $a = 354,367056$ jours.

1. Calculer les approximations de Farey de $a - 354$.
2. Expliquer pourquoi le calendrier musulman comprend sur 30 ans 19 années "communes" de 354 jours et 11 années "abondantes" de 355 jours.

5. Sur la construction d'horloges

Cette section arrive en fin de projet alors qu'elle en est historiquement la source. C'est en effet un horloger, Achille Brocot qui développa pour les besoins de la construction et de la restauration d'horloges. Dans une horloge, on doit produire par exemple un mécanisme qui va être basé sur l'année solaire et un autre sur le mois lunaire. On a alors les deux nombres suivants :

$$a = 365,242199\ldots \quad \text{et} \quad l = 29,530588\ldots,$$

soit un rapport de

$$r = 12,368267\ldots.$$

Un engrenage a un nombre entier de dents et évidemment pour des raisons techniques, il peut être intéressant de ne manipuler que des nombres de dents qui soient relativement peu élevés. C'est ce problème qui a conduit Brocot aux suites de Farey. En effet, il faut alors obtenir une approximation rationnelle

---

équinoxes, c'est donc la période liée à la différence entre la longitude moyenne du barycentre Terre-Lune et la précession des équinoxes. Cette période est indépendante de l'origine choisie. L´année tropique moyenne vaut, actuellement, environ $365,2422$ jours.

de r avec des dénominateurs que l'on puisse maîtriser, ce que ne permet pas l'algorithme des fractions continues.