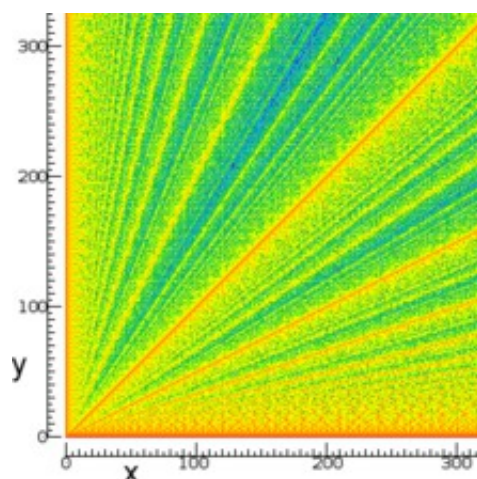


## Structure des nombres réels

### Partie IV - Fractions continues à quotients bornés et approximation



De nombreux problèmes (en physique, informatique, etc) font intervenir des quantités dont on ne peut connaître la valeur qu'à une précision finie fixée. L'origine de cette limitation peut être due à l'existence de seuil dans la précision des appareils de mesure ou encore de nature intrinsèque comme celle donnée en mécanique quantique par la constante de Planck. L'existence de ces échelles limites peut être abordée de différentes façons. Nous en proposons une ici qui consiste à ne regarder que des nombres qui s'écrivent en terme de fractions ne faisant intervenir que des entiers plus petits qu'un certain entier  $n$  (on parle de fractions continues). L'ensemble des réels s'obtient alors comme ensemble limite du précédent.

#### 1. Un algorithme de construction

**1.1. Le cas des fractions construites avec des 1 et des 2.** — Nous allons supposer qu'il nous est impossible de distinguer des nombres plus grands ou égaux à 2. Formellement cela revient à identifier le nombre 2 avec l'infini.

Pour représenter cela, nous allons faire une flèche reliant deux à l'infini sur l'axe des abscisses.

Comme nous voulons considérer des fractions, nous allons nous occuper de deux types d'opérations : l'addition qui sera notée  $A : x \mapsto x + 1$  et la division qui sera notée  $D : x \mapsto 1/x$ . N'oublions pas que nous nous intéressons aux rationnels ce qui explique que nous ne regardions ici que l'addition par 1 et pas par un nombre réel quelconque.

Comme 2 est identifié avec l'infini alors  $1/2$  est identifié avec 0 et nous ferons une petite flèche qui relie  $1/2$  et 0. Cette zone qui "colle" tous les nombres entre 0 et  $1/2$  est obtenue comme image de celle entre 2 et l'infini par application de  $D$ .

On peut représenter en ordonnée l'erreur commise sur un nombre lorsqu'on limite de cette façon les dénominateurs possibles. Si  $x$  est un nombre compris entre 0 et  $1/2$  il sera identifié à zéro et l'erreur est donc  $e(x) = x - 0 = x$ . On représente donc un segment de droite entre 0 et  $1/2$ .

Que donne l'action de  $A$  ? On transporte la zone de collage à droite de zéro par  $D$  au voisinage de 1. On fait une flèche sur l'axe des abscisses qui identifie  $1 + 1/2$  avec 1. En ordonnée, on obtient un autre segment de droite. L'action de  $D$  sur cette zone à droite de 1 donne une autre zone de collage à gauche de 1 légèrement dissymétrique et donnée par  $1/(1 + (1/2))$ . En ordonnée on obtient encore un segment de droite.

On voit donc apparaître autour de 1 une zone où les nombres sont tous identifiés à 1.

Le procédé peut se continuer indéfiniment et ne va faire apparaître que des fractions qui sont construites avec des 1 et des 2.

1. Faire un dessin expliquant ces différentes étapes.

2. Que se passe-t-il lorsqu'on continue la construction ?
3. Identifier plusieurs types de zones autour des nombres.

**1.2. Le cas quelconque.** — On peut bien entendu expliquer la construction de manière générale et retrouver les résultats précédents.

1. Expliquer la construction avec un  $n$  quelconque.
2. Quels sont les nombres que l'on obtient par ce procédé ?

L'écriture des nombres précédents sous la forme d'une fraction est un exemple de fractions continues (étudiées par le groupe I).

**1.3. Le cas limite : les nombres réels.** — On peut évidemment se demander quel est l'ensemble des nombres que l'on récupère lorsque  $n$  tend vers l'infini.

1. Que se passe-t-il lorsque  $n$  tend vers l'infini ?
2. Donner une interprétation de ce résultat.
3. Donner une écriture de tout nombre réel qui fait apparaître la construction précédente.

La figure précédente combine une information sur le dénominateur et sur l'approximation obtenue avec la limitation que l'on a choisie. Nous allons voir quelques propriétés des bords des zones d'accumulations étranges.

**1.4. Sur les zones d'accrochage.** — Nous avons vu l'apparition de zones d'accrochage autour des rationnels et qui représentent les nombres que l'on ne peut pas distinguer du rationnel le plus proche avec la limitation donnée sur  $n$ . Ces zones deviennent de plus en plus petites et semblent se rapprocher d'un point de l'abscisse. Quel est ce point ?

Pour le savoir, nous allons traiter un exemple avec le bord de la zone à droite de 1. Comment obtient-on la prochaine zone d'accrochage à droite de 1 ? Il faut faire  $1/x$  pour obtenir la zone à gauche de 1. Ensuite on la transporte par  $x + 1$  ce qui donne une zone d'accrochage à gauche de 2. On fait encore  $1/x$  et on obtient une zone qui se colle à la zone d'accrochage de 0. On fait  $x + 1$  et

on obtient la nouvelle zone d'accrochage sur la droite de 1, autrement dit on fait la composition suivante :

$$A \circ D \circ A \circ D(x) = \frac{x}{x+1} + 1.$$

On réapplique cette application une infinité de fois pour obtenir le bord de la zone droite. Si on note  $l$  ce bord, il doit alors vérifier

$$\frac{l}{l+1} + 1 = l$$

car c'est un point limite.

1. Résoudre l'équation précédente et déterminer  $l$ .
2. Faire le même calcul pour la zone à gauche de 1.
3. Écrire la fraction représentant le nombre du bord de droite.

Les bords sont par définition des nombres que nous ne pouvons pas atteindre. On peut identifier le bord de beaucoup de zones d'accrochage mais on voit aussi que certaines sont de nature différentes de celles de 1. Pour ces dernières la nature du nombre limite est inconnue.

## 2. Un codage des fractions

Nous avons engendré les ensembles de fractions continues par l'action de  $A$  et  $D$ . On peut mettre en correspondance toute écriture des nombres de la forme

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots}}},$$

où les  $a_i$  sont des entiers avec une composition particulière de  $A$  et de  $D$ . Par exemple, la fraction

$$1 + \frac{1}{2},$$

s'écrit aussi

$$A \circ D \circ A^2(0),$$

ce que vous pouvez vérifier à la main. De la même manière, la fraction

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{3}},$$

s'écrit aussi

$$A \circ D \circ A^2 \circ D \circ A^3(0).$$

1. Donner pour une fraction continue donnée son écriture en fonction de  $A$  et  $D$ .

On peut donc remplacer une fraction par la donnée d'un mot seulement écrit à l'aide de  $A$  et  $D$ . On pourrait se dire que ce n'est qu'un jeu d'écriture, mais on voit tout de suite qu'il va être possible de caractériser certains nombres dont l'écriture est d'une forme particulière. Par exemple, un nombre dont la fraction ne fait intervenir que des 1 dans son écriture en fraction continue est codé par

$$\dots \circ D \circ A \circ \dots A \circ D \circ A(0),$$

qui peut aussi s'écrire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (D \circ A)^n(0)$$

où  $(D \circ A)^n$  représente la composée  $n$  fois de  $D \circ A$ . On sait que la limite si elle existe sera une solution de  $(D \circ A)(x) = x$  soit une solution de  $\frac{1}{x+1} = x$ .

On obtient alors  $x$  comme solution de  $x^2 + x - 1 = 0$  soit  $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ .

1. En suivant l'exemple précédent, préciser vers quel nombre converge la fraction constituée d'une répétition de 1 et de 2.
2. Chercher une généralisation de ces résultats.

---