UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

Mémoire d'habilitation à diriger des recherches

QUELQUES PROBLÈMES DE PHYSIQUE-MATHÉMATIQUE

présenté par

Jacky CRESSON

Rapporteurs :

Pierre CARTIER (I.H.E.S)
Jean ECALLE (Univ. Paris XI, Orsay)
Hakan ELIASSON (Univ. Paris 7)
Laurent NOTTALE (Observatoire de Paris-Meudon)

Soutenu le 18 décembre 2001 à Besançon devant le jury composé de :

Pierre CARTIER (I.H.E.S)
Jean ECALLE (Univ. Paris XI)
Henri LOMBARDI (Univ. de Franche-Comté)
Laurent NOTTALE (Observatoire de Paris-Meudon)
Robert ROUSSARIE (Univ. de Dijon)
Michel WALDSCHMIDT (Univ. Paris 6)
Jean-Christophe YOCCOZ (Collège de France)

à Hafsa et Naoufel

Introduction

J'ai regroupé mes travaux sous les quatre thèmes suivants :

1. Instabilité hamiltonienne,

2. Autour du problème du centre et du calcul moulien de Jean Ecalle,

3. Théorie des nombres et physique,

4. Des fonctions continues non différentiables à la théorie de la relativité d'échelle.

Les quatre chapitres qui suivent sont un résumé de mes principaux résultats dans chacun de ces thèmes. Ces résultats sont issus des articles ou des prépublications dont les références sont données en début de chaque mémoire. Ces mémoires contiennent aussi une liste de questions ouvertes, des conjectures, ainsi que des axes de recherche. Ils peuvent être lus de manière indépendante. Chaque chapitre possède une bibliographie.

Seul le thème 1 poursuit les idées de ma thèse de Doctorat, "Propriétés d'instabilité des systèmes hamiltoniens proches intégrables", soutenue en décembre 1997.

J'espère que le lecteur curieux trouvera dans les pages qui suivent matière à réflexion.

Paris, Décembre 2001.

Remerciements

Je remercie tout d'abord les rapporteurs, Pierre Cartier, Jean Ecalle, Hakan Eliasson et Laurent Nottale, ainsi que les membres du jury, Henri Lombardi, Robert Roussarie, Michel Waldschmidt et Jean-Cristophe Yoccoz.

Ces quatre dernières années ont été riches de rencontres. Il y a tout d'abord ceux avec qui j'ai collaboré : Bertrand Schuman, Faycal Ben Adda, Michel Planat, Jean-nicolas Dénarié, Christophe Guillet, Marc Rabiet et Marc Bousquet.

Il y a aussi tous ceux avec qui j'ai discuté mes résultats : Eva Bayer, Ivan Kupka, Pierre Lochak, Leila Schneps, Michel Petitot, Herbert Gangle, Massimiliano Berti, Stephane Fischler, Tanguy Rivoal, Laurent Larger, Olivier Eveilleau, Salah Labhalla.

Enfin, ce travail s'est déroulé dans une très bonne ambiance, grâce à l'équipe de nuit du laboratoire de Mathématiques de Besançon : Stéphane Chrétien, Hervé Perdry, Jean-Nicolas Dénarié, Christophe Frings.

Table des matières

Chapitre 1

Instabilité hamiltonienne

"Mathematics is the name for those domains of theoritical physics that are temporarily unfashionable"
V.I. Arnold, dans Mathematical problems in classical physics, 1992

Publications associées

[T1] Un λ-lemme pour des tores partiellement hyperboliques, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 331, Série I, p. 65-70, 2000.

[T2] Dynamique symbolique et tores partiellement hyperboliques, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Série I, p. 1091-1096, 2000.

[T3] Hamiltonian chaos, AIP Conf. Proc. 517, Dubois ed., p. 510-525, 2000.

[T4] Hyperbolicité et non intégrabilité analytique I. Points hyperboliques, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, p. 325-328, 2001 (avec M. Rabiet).

[T5] Hyperbolicité et non intégrabilité analytique II. Tore normalement et partiellement hyperboliques, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 333, Série I, p. 229-232, 2001.

[T6] The transfer lemma for Graff tori and Arnold diffusion time, Disc. and Cont. Dyn. Syst. Vol. 7, no. 4, p. 787-800, 2001.

[T7] Temps d'instabilité des systèmes hamiltoniens initialement hyperboliques, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, p. 831-834, 2001.

[T8] Symbolic dynamics and Arnold diffusion, à paraître dans J. Diff. Equ.

[T10] Periodic orbits and Arnold diffusion, (avec C. Guillet), soumis à Disc. and Cont. Dyn. Syst.

[T11] Création d'hyperbolicité et phénomène de transversalité-torsion (avec C. Guillet), soumis à J. Math. pure et appl.

[T12] Conjecture de Chirikov et optimalité des exposants de stabilité du théorème de Nekhoroshev, prépublication 98/40, 1998.

Ce mémoire regroupe 12 articles (dont 7 sont publiés) autour de l'instabilité des systèmes hamiltoniens presques intégrables. Ces travaux font suite à ma thèse "*Propriétés d'instabilité des systèmes hamiltoniens presque intégrables*" soutenue en décembre 1997 à l'observatoire de Paris. J'avais alors indiqué un programme visant à démontrer la conjecture de V.I. Arnold de 1964 sur l'instabilité hamiltonienne générique, en classe analytique, des systèmes hamiltoniens presque intégrables. C'est ce programme que j'ai suivi jusqu'à aujourd'hui et qui conduit la plupart de mes travaux.

1.1 Les systèmes hamiltoniens presque intégrables et la conjecture d'Arnold

Le cadre naturel de la conjecture d'instabilité de V.I. Arnold est celui de l'hypothèse quasi-ergodique. Les prochains paragraphes précisent ce lien.

1.1.1 L'hypothèse quasi-ergodique et une question de M. Herman

Ce paragraphe s'inspire librement d'un exposé de M. Herman [19] sur "L'hypothèse ergodique et la stabilité en mesure" aux journées annuelles de la SMF en 1996.

Au XIX^e siècle apparait l'*hypothèse ergodique* (Maxwell, Boltzmann vers 1870), qui peut se formuler comme suit :

HYPOTHÈSE ERGODIQUE : *Soit M^{2n} une variété symplectique de dimension $2n$, $n \geq 1$, $H : M^{2n} \to \mathbb{R}$ un Hamiltonien et f_t^H son flot. Soit c une valeur régulière de H. Alors f_t^H passe par tout point de $H^{-1}(c)$.*

Cette hypothèse est mise en défaut par le théorème KAM (A.N. Kolmogorov, V.I. Arnold, J. Moser) : pour un ouvert de Hamiltonien H et un ouvert de valeurs de l'énergie, on trouve sur chaque niveau d'énergie un ensemble de tores diophantiens lagrangiens invariants de mesure positive.

Au lieu d'exiger que le champ X_H soit ergodique sur chaque composante connexe de presque tout niveau d'énergie, on peut demander la propriété plus faible suivante :

HYPOTHÈSE QUASI-ERGODIQUE : *Pour presque tout hamiltonien propre H sur une variété symplectique (M, ω) et pour un ensemble dense de valeur de l'énergie, le champ*

X_H a une orbite dense sur chaque composante connexe de ce niveau d'énergie.

Le théorème KAM implique que l'HQE est fausse si $2n = 4$.

Par ailleurs, M. Herman et I.O. Parasyuk ont démontré que l'hypothèse quasi-ergodique est fausse si $2n \geq 4$ sur les variétés de la forme $\mathbb{T}^{2n-1} \times \mathbb{R}$.

L'hypothèse quasi-ergodique est une question ouverte sur les fibrès cotangents avec $2n \geq 6$. M. Herman pose la question suivante [20] :

QUESTION. *Peut-on trouver un exemple d'hamiltonien C^∞ (resp. C^ω) H dans un voisinage C^k, $k \geq 2$ de $H_0(r) = 1/2 \parallel r \parallel^2$, tel que, sur $H^{-1}(1)$, le flot hamiltonien de H a une orbite dense ?*

De nombreux auteurs pensent que de tels exemples existent et sont C^∞ (resp. C^ω) génériques. C'est notamment le cas de V.I. Arnold [1]. Dans la suite, nous expliquons pourquoi.

1.1.2 Instabilité topologique et mécanisme d'Arnold

Dans ce paragraphe, on donne les grandes lignes des idées de V.I. Arnold sur l'instabilité topologique.

Théorème KAM et conjecture d'Arnold

On considère un système hamiltonien de la forme

$$H_\epsilon(I,\theta) = h(I) + \epsilon f(I,\theta), \tag{1.1}$$

où $(I,\theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ sont les variables action-angle, et $0 < \epsilon << 1$ est un petit paramètre. Dans toute la suite, on peut, en suivant la question de M. Herman, supposer que

$$h(I) = \frac{1}{2}I^2. \tag{1.2}$$

Lorsque $\epsilon = 2$, les sous variétés d'énergie constante de H_0 sont feuilletées en tores lagrangiens invariants. Les variables d'action sont constantes sur un temps infini.

Lorsque $\epsilon \neq 0$, le théorème KAM assure, sous une hypothèse de non dégénérescence de h, la persistence d'une famille de tores lagrangiens invariants, appelés tores de KAM, en dehors de zônes de résonance. Ces tores sont de petites déformations des tores initiaux.

Par ailleurs, le théorème de Nekhoroshev permet de majorer l'évolution des variables d'action sur un temps exponentiellement long. Si h est convexe, on a $| I(t) - I(0) | \leq c_1 \epsilon^b$ pour $| t | \leq c_2 \exp(c/\epsilon^a)$ avec $a = b = 1/2n$.

Dans le complémentaire des tores de KAM, deux situations se présentent. Si $n \leq 2$, le complémentaire des tores de KAM est non connexe, et les variables d'actions sont confinées par les tores de KAM successifs. Si $n \geq 3$, le complémentaire des tores de KAM est connexe, et rien n'interdit une dérive des variables d'action, le temps de dérive étant exponentiellement long.

La toile d'Arnold

Le complémentaire des tores de KAM est lié aux résonances. Pour tout $I \in U$, on note $\omega(I) = \dfrac{\partial h}{\partial I}(I)$.

Définition 1 *Soit $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. On appelle feuille 1-résonante associée à k, et on note R_k, l'ensemble des points $I \in \mathbb{R}^n$ tel que $k.\omega(I) = 0$.*

On note $\mathbb{RP}^{n-1}$ l'espace projectif réel de dimension $n-1$. On appelle *application fréquence*, l'application $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{RP}^{n-1}$ définie par

$$\omega : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{RP}^{n-1}, \\ I & \mapsto & \omega(I). \end{array} \tag{1.3}$$

Définition 2 *On appelle toile d'Arnold[1] d'ordre $n \geq 2$, et on note $\mathcal{R}_n$, la réunion des feuilles 1-résonantes, $\mathcal{R}_n = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} R_k$.*

La propriété fondamentale de la toile d'Arnold est la suivante :

Lemme 1 *La toile d'Arnold $\mathcal{R}_n$ est*

i) dense et non connexe si $n = 2$,

ii) dense et connexe si $n \geq 3$.

L'idée de V.I. Arnold est d'utiliser cette toile pour construire des orbites d'instabilité.

Tores partiellement hyperboliques et mécanisme d'Arnold

Depuis les travaux de D. Treschev [41] (et ceux de Graff [18]), on sait que les tores résonants du système intégrable $h(I)$ donnent en général naissance, par perturbation, à des

[1] La toile d'Arnold est souvent appelée toile stochastique, en particulier par B. Chirikov.

tores partiellement hyperboliques (Arnold et Avez les apellent des tores moustachus). Ces tores sont de dimension $n-k$ le long d'une résonance de multiplicité $k \in \mathbb{N}$. Ils possèdent des variétés stables et instables de dimension n.

Supposons que les variétés stables et instables de ces tores se coupent transversalement dans leur variété d'énergie. Supposons de plus que la densité de ces tores dans cette variété soit suffisante pour induire des connexions hétéroclines transverses entre ces tores. On obtient une *chaîne* de tores partiellement hyperboliques.

Sous une hypothèse de dynamique locale sur les tores de la chaîne, appelée *propriété d'obstruction*, il est possible d'ombrer cette chaîne de tore par un ouvert d'orbites. La chaîne est alors dite de *transition*. Les tores hyperboliques étant paramétrés par les variables d'action, une transition le long de la chaîne induit une dérive dans les variables d'action. L'importance de cette dérive dépend de la longeur de la chaîne.

C'est cette construction que l'on appelle *mécanisme d'instabilité d'Arnold*, l'instabilité étant relative à la dérive des variables d'action.

1.1.3 Le problème des trous

La construction d'une chaîne de transition le long d'une résonance d'un système hamiltonien proche d'un système intégrable, dans un cadre analytique, n'est pas facile (dans un cadre C^∞, on renvoie au travail de raphael Douady [11]). L'angle d'intersection des variétés stable et instable d'un tore de KAM hyperbolique , au sens de [26], est exponentiellement petit en le paramètre perturbateur. Cet angle détermine un voisinage du tore de taille proportionnel à l'angle, dans lequel, si il existe un autre tore KAM hyperbolique, on a une intersection hétérocline. Or, la densité des tores de KAM hyperbolique est de l'ordre de $\sqrt{\epsilon}$ (voir [38]). Il n'est donc pas possible de construire une chaîne dérivant sur un voisinage de longueur indépendante de ϵ. On peut tout au plus construire, en suivant richard Moechel ([32], voir aussi [T3],5.B), de petites chaînes de transition, qui ne sont pas significatives (de taille $\sqrt{\epsilon}$). C'est ce problème de connexion hétérocline qui est connu sous le nom de "gaps problem", i.e. problème des trous.

On note au passage que ce problème des trous dans la construction d'une chaîne de transition n'est pas spécifique aux systèmes hamiltoniens proches d'un système intégrable. Dans le cas initialement hyperbolique le même problème se pose (voir [T3],§.3).

1.2 Dynamique au voisinage des tores moustachus

Beaucoup d'articles étudient la dynamique des tores partiellement hyperboliques. Une partie de ses travaux concernent l'existence d'une forme normale du hamiltonien au voisinage de ces tores. On peut définir les tores partiellement hyperboliques des champs de vecteurs hamiltoniens de deux façons : de manière intrinséque, "dynamique" comme disent S. Bolotin et D. Treshev [5], ou "à la KAM" via une forme normale ([15],[11]). Ces deux définitions sont équivalentes [5]. Dans toute la suite, nous allons donc travailler avec des formes normales.

1.2.1 Les énoncés de type λ-lemme à la J. Palis

Le λ-lemme de Jacob Palis [36] pour un point fixe hyperbolique d'un difféomorphisme permet de démontrer de nombreux résultats de dynamique, notamment le théorème de Smale-Birkhoff, et le théorème de conjugaison de Hartman et Grobman [37]. Il montre qu'une propriété de dynamique locale peut expliquer des phénomènes compliqués de dynamique globale.

Le λ-lemme a été généralisé pour les tores normalement hyperbolique par Wiggins [43] (voir aussi [4],chap.1). On note au passage que ce résultat s'étend sans peine au cas d'une variété compacte normalement hyperbolique quelconque. La démonstration est analogue à celle de Palis. La dynamique sur le tore n'intervient pas, et le phénomène est donc purement géométrique.

Dans [27], Marco généralise partiellement le λ-lemme pour les tores de Graff dans le cas 1-hyperbolique, la situation générale étant résolue dans [8]. Le "partiel" fait référence à une condition de cône sur les variétés admissibles. Ici encore, la dynamique sur l'objet n'intervient pas. C'est dans la démonstration de la propriété d'obstruction que la dynamique sur le tore refait surface, via une condition de non résonance du vecteur fréquence.

Dans [T1], pour les besoins de la dynamique symbolique, j'ai exploré le rôle de la dynamique sur le tore dans le phénomène de redressement au voisinage d'un tore partiellement hyperbolique. Le point important est le suivant : si la dynamique sur le tore est avec *torsion*, alors on a redressement de la variété même dans les directions neutre et tangente. Le λ-lemme de Palis s'étend à cette situation, sans restriction.

Quels sont les développements possibles ?

Recemment, Victoria Rayskin [39] a démontré ce qu'elle appelle un λ-lemme singulier, i.e. valable pour des intersections homoclines tangentielles des variétés stable et instable d'un point fixe hyperbolique. Son travail doit s'étendre sans trop de difficultés au cas d'un ensemble normalement hyperbolique et d'un tore partiellement hyperbolique.

Quel est l'intérêt ?

Les conditions d'intersection des méthodes variationelles sont plus faibles que la transversalité. Néanmoins, elles demandent une intersection des variétés qui doit être la distinction entre une intersection "crossing" et "touching" utilisée par Rayskin. Lorsque l'intersection est "touching", on peut avoir des phénomènes de type Newhouse [34]. Autrement dit, les méthodes dites géométriques couvrent autant de cas que les méthodes variationelles.

De plus, il semble possible de montrer qu'une intersection tangentielle "crossing" entraîne une intersection transverse. Ce point est important. Dans ce cas, le phénomène de transversalité-torsion (qui est explicité ci-après) a encore lieu, créant une dynamique hyperbolique locale le long de l'homocline.

1.2.2 Phénomène de transversalité-torsion

On commence à comprendre la spécificité de l'hyperbolicité partielle vis à vis de l'hyperbolicité normale : la dynamique locale dépend de la dynamique hyperbolique et de son couplage à la dynamique sur l'objet.

Un exemple plus frappant est donné par le phénomène de *transversalité-torsion*, terme que j'ai introduit dans [T2]. On suppose qu'un tore partiellement hyperbolique possède une intersection transverse dans une variété d'énergie donnée. On a au moins une orbite homocline au tore. Quelle est la dynamique au voisinage de cette orbite homocline ? Est-elle hyperbolique ? Si oui, on se trouve dans une situation où le lemme de l'ombre (shadowing lemma) s'applique et divers résultats dynamiques en découlent.

On démontre que la dynamique le long d'une homocline est hyperbolique si et seulement si l'intersection est transverse et la dynamique sur le tore est avec torsion. Autrement dit, un phénomène géométrico-dynamique crée de l'hyperbolicité.

Ce phénomène est exploré en détail dans [T9].

Il me semble que le résultat est important, indépendamment de l'instabilité des systèmes hamiltoniens. La dynamique non hyperbolique est encore largement inexplorée. Il y a peu d'outils à notre disposition, et aucune idée ne se dégage pour aborder ce territoire très vaste des systèmes dynamiques.

Le phénomène de transversalité-torsion, qui ramène une situation partiellement hyperbolique dans le domaine hyperbolique, n'est certainement pas isolé. Trouver ces mécanismes dans un cadre général (non hamiltonien) est une première étape pour commencer à étudier ces systèmes non hyperboliques.

1.2.3 Dynamique symbolique

La dynamique symbolique au voisinage d'un tore partiellement hyperbolique transverse découle du phénomène de transversalité-torsion et de la propriété de redressement des directions neutre et tangente grâce à la torsion. La note [T2] démontre ce résultat, couplée à l'article [T9], on peut s'affranchir d'une des hypothèses sur la forme de l'application homocline.

L'article [T6] énonce le même résultat dans une situation perturbative, la transversalité dépendant d'un petit paramètre. La démonstration est beaucoup plus difficile. Un point important est que l'alphabet de la dynamique symbolique est explicite et dépend des propriétés dynamiques du flot sur le tore.

Pourquoi avoir étudié cette situation paramétrée (ce qui n'est pas fait dans le cas hyperbolique par exemple) ?

Dans [T2], on démontre que l'existence d'une dynamique symbolique sur un ensemble invariant hyperbolique au voisinage du tore permet, si on se donne une chaîne de tores, de construire une chaîne "duale" d'orbites périodiques hyperboliques. Or, il est facile de calculer le temps d'instabilité le long d'une chaîne d'orbites périodiques. Cette estimation n'est possible que si la construction est quantitative, d'où [T6].

1.3 Instabilité sans chaînes

L'article [T3] est une première mise en forme des idées de ma thèse ([4],chap.4).

La première remarque est la suivante : dans un système hamiltonien proche d'un système intégrable, les tores partiellement hyperboliques construits le long des résonances multiples appartiennent à un ensemble normalement hyperbolique. C'est cet ensemble qui est important. A ma connaissance, c'est stephen Wiggins [43] qui ,le premier, met en évidence de manière claire son rôle dans la construction des tores partiellement hyperboliques, repris ensuite par jeff Xia ([44],[45]). Mais le rôle possible de cet objet dans la construction d'orbites d'instabilité sans chaîne n'est pas abordé. On trouve une première avancée en ce sens dans le chapitre prospectif de ma thèse ([4],chap.4). L'année suivante Xia utilise aussi de façon essentielle cet ensemble [46]. Cet ensemble est construit dans ([T3],§.4) pour le cas à 3 degrés de libertés, le cas général étant analogue.

Quel est le rôle de cet ensemble normalement hyperbolique ?

Il permet d'envisager différement la construction d'orbites d'instabilité le long d'une résonance simple. On se restreint maintenant à un système hamiltonien à trois degrés de liberté, en considérant le cadre de la question de michel Herman. Dans ce cas, le long d'une résonance simple, on obtient un ensemble normalement hyperbolique de dimension 2. La dynamique en section sur cet ensemble est celle d'une perturbation d'un twist map. Les tores hyperboliques s'obtiennent par relévement des courbes invariantes en section. On obtient ainsi des tores de KAM hyperboliques comme ceux de Treschev et d'autres tores dont la dynamique est plus compliquée.

On peut supposer que les variétés stable et instable de ces tores se coupent transversalement. Comme ils sont avec torsion, le phénomène de transversalité-torsion donne une dynamique hyperbolique locale le long de l'homocline.

Comment relier deux tores consécutifs (le consécutifs peut se lire sur le nombre de rotation) ?

J'entrevoie au moins trois possibilités, qui d'ailleurs peuvent être couplées :

- La première est celle explorée dans [T3] que j'avais proposée dans ma thèse ([4],chap.4). On utilise les orbites de Birkhoff, i.e. les orbites d'instabilité reliant deux cercles invariants bordant une zône d'instabilité (voir [23],[28]). Je renvoie à [T3] pour une mise en oeuvre de cette construction.

- On peut aussi utiliser les ensembles d'Aurby-Mather, qui sont de plus génériquement hyperboliques (c'est un point important pour la suite).

- Utiliser les familles d'orbites périodiques hyperboliques dans les zônes d'instabilité. Cette dernière idée m'a été proposée par jeff Xia après mon exposé à l'IHES en septembre 1999.

Nous avons maintenant un "squelette" de diffusion. Comment recoller ces orbites ?

C'est dans cette partie que joue à fond le phénomène de transversalité-torsion. Dans [T3], via les orbites de Birkhoff, on montre que la dynamique couplée le long de l'homocline et le long de l'orbite d'instabilité reste hyperbolique. La construction effective des orbites, pour laquelle j'ai utilisé la méthode des fenêtres d'Easton, est délicate. Notamment, le temps d'instabilité explose car afin de régler l'alignement des fenêtres, on est obligé de passer de plus en plus près des orbites homoclines et de l'ensemble invariant.

De même, avec les ensemble d'Aubry-Mather, la dynamique couplée doit rester hyperbolique.

Il me semble qu'en fait, c'est justement cette existence d'une dynamique hyperbolique localisée le long de l'ensemble normalement hyperbolique qui permet à Xia ou Mather de mettre au point un principe variationel pour ce type de problème.

Il est maintenant possible de généraliser considérablement l'énoncé ([T3],theorem 2) en utilisant [T9].

1.4 Théorème de Nekhoroshev et temps de diffusion

On reprend les notations du §.1.1.2. Le théorème de Nekhoroshev permet de borner la dérive des variables d'action sur un temps exponentiellement grand : soit $(I_\epsilon(t), \theta_\epsilon(t))$ une solution de (1.1). Pour tout $0 < \epsilon << 1$ suffisamment petit, on a $| I_\epsilon(t) - I_\epsilon(0) | < \epsilon^b$ pour tout $t \in [0, T]$ avec $T = (1/\epsilon) \exp(1/\epsilon^a)$. Si h est convexe, on a $a = b = 1/2n$.

Par ailleurs, pierre Lochak [24] a démontré que le long des résonances de multiplicité $d = 1, \ldots, n-1$, on a $a = b = 1/2(n-d)$.

1.4.1 Les systèmes hamiltoniens proches de systèmes intégrables

On note $\pi_I : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\pi_I(\theta, I) = I$, la projection sur l'espace des actions. Dans [T12] on démontre que le long d'une résonance simple d'un système hamiltonien convexe à trois degrés de liberté, l'exposant $b = 1/4$ est optimal. Il est possible de construire une perturbation analytique d'un hamiltonien convexe pour lequel il existe une trajectoire $z(t)$

satisfaisant $| \pi_I(z(0)) - \pi_I(z(T)) | > C$, $C > 0$ une constante, pour $T = O(\exp(1/\epsilon^{1/4}))$.

De même, il est possible de construire des perturbations analytiques de systèmes hamiltoniens linéaires, i.e. de la forme $h(I) = \omega.I$, qui optimisent des résultats de Fassò [16] (voir [T12]).

U. Bessi [2] a obtenu des résultats analogues via des méthodes variationelles. Ceci dit, le procédé de démonstration est différent.

Dans [T12], je suis une stratégie mise en place dans [T6] et [T7]. On se donne une famille de tores partiellement hyperboliques, dont on connait une bonne forme normale, paramétrée par ϵ. Quantitativement, on a aussi besoin d'une estimation "par en dessous" de l'angle d'intersection entre les variétés stable et instable des tores de la chaîne. Avec ces données on estime un temps d'instabilité le long d'une chaîne de transition.

Dans [T6] et [T7], on obtient ainsi une estimation, valable en dimension quelconque, du temps d'instabilité dans un système hamiltonien initialement hyperbolique.

Dans [T12], on obtient de même un résultat général, valable en dimension quelconque, et donnant la dépendance du temps d'instabilité en fonction du minimum des angles d'intersection et du nombre de tores de la chaîne.

Le problème est alors d'obtenir une estimation par en dessous de l'angle d'intersection des variétés stable et instable d'un tore partiellement hyperbolique. Ce travail est fait dans un cas particulier (à la Arnold) par Rudnev et Wiggins [40]. Pour le cas linéaire, on a recours au travail de Delshams et Gutiérrez ([9],[10]). Ces résultats sont malheureusement limités aux systèmes hamiltoniens à 3 degrés de liberté, et il semble bien difficile d'obtenir un énoncé général.

Quelles sont les développements possibles ?

L'article [T12] doit être remanié avant soumission. Notamment, j'aimerai prendre en compte les résultats de Fontich et Martin [17] sur l'existence d'une diffusion d'Arnold générique, en topologie analytique, au voisinage d'un hamiltonien analytique intégrable non dégénéré, et pour un nombre de degrés de liberté quelconque. Par ailleurs, ils ont des constructions explicites des perturbations analytiques, ainsi qu'une estimation des intégrales de Melnikov. Il semble donc possible de démontrer, via le théorème de [T12], un résultat d'optimalité générique de l'exposant de stabilité $b = 1/4$ dans le cas de 3 degrés de liberté.

1.4.2 Fenêtres d'Easton et orbites périodiques

Le calcul d'un temps d'instabilité pour un système hamiltonien initialement hyperbolique ("a priori instable" suivant la terminologie de luigi Chierchia et giovanni Gallavotti [6]) est apparu comme un banc d'essai des différentes méthodes existantes. Dans [25], pierre Lochak conjecture que pour un paramètre perturbateur μ, le temps d'instabilité doit être de l'ordre de $(1/\mu)\log(1/\mu)$. Les estimations habituelles, comme dans [T6], [T7], sont polynomiales en μ, i.e. un temps de l'ordre de $1/\mu^2$.

Cette année, plusieurs groupes ont démontré la conjecture de Lochak. Massimiliano Berti et philippe Bolle [3] ont obtenu ce résultat via des méthodes variationnelles. Avec christophe Guillet (Dijon), nous avons utilisé les chaînes duales d'orbites périodiques hyperboliques.

L'intérêt de l'article [T10] tient plus à la méthode employée. On donne d'abord une estimation générale d'un temps d'instabilité le long d'une chaîne d'orbites périodiques hyperboliques. Cette estimation dépend des angles d'intersection des variétés stable et instable des orbites périodiques, de leurs périodes, et de leurs nombres. On montre ensuite que les angles d'intersection d'une chaîne de tores sont conservés dans la chaîne duale, et que les périodes dépendent constructivement de ces angles via l'alphabet de la dynamique symbolique. Cet alphabet étant lui même lié à l'ergodisation du tore, on a une interprétation géométrico-dynamique du temps obtenu.

1.5 Non intégrabilité analytique

Initialement, c'est la démonstration du résultat annoncé par Jeff Xia [44] sur la non intégrabilité analytique du problème des 3 corps restreint elliptique plan comme conséquence du mécanisme d'Arnold qui m'a ammené à ce sujet. Les arguments avancés par Xia sont incorrects. J'ai détaillé ce point dans ma thèse ([4],chap.3). Le résultat de Xia est démontré dans [T5], via une approche développée dans [T4].

1.5.1 Le théorème de Moser

Le problème de non intégrabilité analytique que nous abordons dans les notes [T4] et [T5] est particulier. On étudie l'existence d'une intégrale première analytique un objet géométrique étant donné. C'est la dynamique locale de cet objet qui permet de décider si on a, ou non, une intégrale première.

Un exemple de ce type de résultat est le thérème de Moser : soit f un difféomorphisme du plan, possèdant un point fixe hyperbolique dont les variétés stable et instable se coupent transversalement, alors il n'existe pas d'intégrale première analytique.

Quelle est l'idée de la démonstration ?

Par le théorème de Birkhoff-Smale, il existe au voisinage du point fixe un ensemble invariant hyperbolique sur lequel la dynamique est conjuguée à un shift de Bernoulli. On peut montrer que cet ensemble est un *ensemble d'unicité* (key set) pour les fonctions analytiques. Essentiellement, c'est l'existence d'une orbite dense dans l'ensemble invariant, et sa structure hyperbolique qui donne ce résultat.

Les arguments de Moser ne s'étendent pas aux dimensions supérieures.

1.5.2 Le lemme de trivialité

L'article [T4] est simple, mais fondamental. Il peut être considéré comme une relecture de la démonstration de Moser.

Premier point : si une fonction, de classe C^1 est constante sur deux variétés qui se coupent transversalement, alors au point d'intersection la différentielle de cette fonction est nulle.

Second point : soit A un ensemble normalement hyperbolique dont les variétés stable et instable se coupent transversalement suivant au moins une homocline. On fait l'hypothèse suivante :

Hypothèse de trivialité : si une fonction analytique est nulle sur l'orbite homocline, alors elle est nulle sur la variété stable et instable.

En utilisant l'hypothèse de trivialité et le premier point, on déduit facilement par récurrence sur les dérivées succesives de l'intégrale première que le système n'admet pas d'intégrale première analytique.

Sous quelles conditions l'hypothèse de trivialité est-elle satisfaite ?

Il suffit de regarder le problème sur la variété stable par exemple. Dans un voisinage convenable de A, la dynamique sur $W^s(A)$ est donnée par un difféomorphisme local f. Soit P une fonction analytique sur $W^s(A)$. On suppose que P est nulle sur une orbite homocline à A, i.e.

$$P(f^k(h)) = 0, \tag{1.4}$$

où h est un point homocline, $k \in \mathbb{N}$. Démontrer que l'hypothèse de trivialité est satisfaite, c'est prouver que ce système infini d'équations implique l'annulation de $P \equiv 0$.

On voit tout de suite, même dans un cas simple, que cela dépend de la dynamique sur $W^s(A)$. Par exemple, on se donne un point fixe A, et on suppose la variété stable $W^s(A)$ de dimension 2. on suppose de plus que la dynamique est linéaire sur $W^s(A)$. On a donc f de la forme $f(x,y) = (\lambda x, \mu y)$. Soit $P(x,y)$ une fonction analytique de deux variables. Alors, les équations $P(f^k(x,y)) = 0$ donnent

$$p_{00} + p_{10}\lambda^k x + p_{01}\mu^k y + p_{11}\lambda^k \mu^k xy + \ldots = 0. \tag{1.5}$$

En faisant tendre k vers l'infini, on montre facilement que $p_{00} = 0$. Supposons maintenant que

$$\lambda = \mu, \tag{1.6}$$

c'est à dire l'existence d'une résonance. Alors, on peut toujours trouver des p_{ij} non nuls qui vérifient le système, par exemple

$$p_{10}x + p_{01}y = 0,\ p_{ij} = 0 \text{ sinon}, \tag{1.7}$$

est possible. Si x et y sont non nuls, alors p_{01} et p_{10} sont non nuls.

Ce petit exemple montre deux choses : la dynamique sur la variété stable doit être sans résonance et le point homocline est sur un ensemble particulier (le complémentaire des variétés fortement stables).

Lorsque l'ensemble A est de dimension n, $n \geq 2$, la dynamique sur A intervient. En effet, la dynamique sur la variété stable dépend de la dynamique sur A. Le plus simple est de considérer une dynamique sur la variété stable donnée par

$$f(x,s) = (g(x), \Lambda s), \tag{1.8}$$

où g est un difféomorphisme de A et Λ est une matrice. L'hypothèse de trivialité revient à l'étude du système

$$\sum_{\nu} p_\nu(g^k(x))(\Lambda^k s)^\nu = 0, \tag{1.9}$$

où ν est un multientier et $k \in \mathbb{N}$. Avec les mêmes conditions que plus haut, on arrive à démontrer que $\lim_{k\to\infty} p_\nu(g^k(x)) = 0$. Pour faire une récurrence, on doit montrer que $p_\nu = 0$. Cela dépend de la dynamique de g. Si g est minimale sur A alors $p_\nu = 0$. Il me semble que c'est une hypothèse nécessaire.

1.5.3 Théorème ergodique multiplicatif d'Oseledec

On peut se demander ce qui se passe lorsque la matrice Λ est dépendante de x, ce qui est génériquement le cas. On ne peut plus appliquer directement les résultats précédents. En effet, le difféomorphisme itéré prend une forme compliquée :

$$f^k(x,s) = (g^k(x), \prod_{i=0}^{k-1} \Lambda(g^i(x))s). \tag{1.10}$$

L'application qui à $x \in A$ associe $\mathcal{A}(x,k) = \prod_{i=0}^{k-1} \Lambda(g^i(x))$ s'appelle un *cocycle*. Or, le théorème ergodique multiplicatif d'Oseledec donne un ensemble de mesure pleine de A, sur lequel on peut expliciter les exposants de Lyapounov (invariants par g) et une décomposition canonique de A suivant ces exposants. On obtient ainsi une situation analogue aux premiers cas étudiés, à ceci près, que le point homocline est maintenant sujet à une condition de projection sur A, à savoir, appartenir à l'ensemble d'Oseledec de $\mathcal{A}$.

Ce travail est en cours de rédaction avec pierre Lochak (Paris 6).

C'est sans doute le résultat le plus général que l'on puisse obtenir. La même méthode permet d'aborder des cas résonants. Joël Merker (Univ. Marseille) a étudié quelques exemples. Les difficultés sont alors de nature algébrique, le système d'équations faisant intervenir des polynômes exponentielles.

Bibliographie

[1] Arnold V.I., Mathematical problems in classical physics, dans *Trends and perspective in applied mathematics*, Appl. Math. Sc. Series 100, Springer, 1992, 1-20.

[2] Arnold V.I., Instability of dynamical systems with several degrees of freedom, Sov. Math. Dok 5 (1964), p. 581-585.

[3] Berti M., Bolle P., Diffusion time and splitting of separatrices for nearly integrable isochronous Hamiltonian systems, preprint, 2000.

[4] Bessi U., An approach to Arnold diffusion throught the calculus of variations, Nonlinear Analysis T.M.A. 26 (1996), p. 1115-1135.

[5] Bolotin S., Treschev D., Remarks on the definition of hyperbolic tori of Hamiltonian systems, Regular and Chotic dynamics, Vol. 5, no. 4, p. 401-412, 2000.

[6] Chierchia L., Gallavotti G., Drift and diffusion in phase space, Ann. Inst. Henri Poincaré 60 (1), p. 1-144, 1994.

[7] Cresson J., Propriétés d'instabilités des systèmes hamiltoniens proches de systèmes intégrables, Thèse Observatoire de Paris, 1997.

[8] Cresson J., A λ-lemma for partially hyperbolic tori and the obstruction property, Lett. Math. Phys. Vol. 42, no. 4, p. 363-377, 1997.

[9] Delshams A., Gutiérrez P., Splitting and melnikov potentials in hamiltonian systems, preprint, 1999.

[10] Delshams A., Gutiérres P., Splitting potential and Poincaré-Melnikov method for whiskered tori in Hamiltonian systems, preprint 1999.

[11] Douady R., Stabilité ou instabilité des points fixes elliptiques, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., t.21 (1988), p.1-46.

[12] Douady R., Le Calvez P., Exemple de point fixe elliptique non topologiquement stable en dimension 4, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 296 (1983), p. 895-898.

[13] Dovbysh S., Transversal intersction of separatrices and branching of solutions as obstructions to the existence of an analytic integral in many-dimensional systems I. Basic result. Separatrices of hyperbolic points, Preprint, 1997.

[14] Easton R.W., Meiss J.D., Roberts G., Drift by coupling to an anti-integrable limit, preprint 2000.

[15] Eliasson H., Biasymptotic solutions of perturbed integrable Hamiltonian systems, Bol. Soc. Bras. Math., Vol. 25, no. 1, 1994.

[16] Fassò F., Lie series method for vector fields and Hamiltonian perturbation theory, ZAMP 41 (1990), p. 843-864.

[17] Fontich E., Martín P., Arnold diffusion in perturbation of analytic integrable Hamiltonian systems, à paraître dans Discr. and Cont. Dyn. Syst. 2001.

[18] Graff S., On the conservation of hyperbolic invariant tori for Hamiltonian systems, J. Diff. Equ. 15 (1974), p. 1-69.

[19] Herman M., L'hypothèse ergodique et la stabilité en mesure, Journée annuelle de la SMF, Juin 1996.

[20] Herman M., Some open problems in dynamical systems, Doc. Math. Extra Volume ICM 1998. II. 797-808.

[21] Herman M., Théorème des tores translatés et quelques applications à la stabilité topologique des systèmes dynamiques conservatifs

[22] Katok A., Hassenblatt B., *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press, 1995.

[23] Le Calvez P., Propriétés dynamiques des régions d'instabilité, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 20 (1987), p. 443-464.

[24] Lochak P., Canonical perturbation theory via simultaneous approximation, Russian Math. Surveys 47 (1992), p. 57-133.

[25] Lochak P., Arnold diffusion ; a compendium of remarks and questions, in *Hamiltonian systems with three or more degrees of freedom*, C. Simò (Ed.), NATO ASI Series, Vol. 533, p. 168-183, 1999.

[26] Lochak P., Marco J-P., Sauzin D., On the splitting of the invariant manifolds in multidimensional near-integrable Hamiltonian systems, prépublication 220, Inst. Math. Jussieu, 1999.

[27] Marco J-P., Transition le long des chaînes de tores invariants pour les systèmes hamiltoniens analytiques, Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Théorique, Vol. 64, no. 2, p. 205-252, 1996.

[28] Mather J., Variational construction of orbits for twist diffeomorphisms, J. Amer. Math. Soc. 4 (1991), p. 203-267.

[29] Mather J., Action minimizing invariant measure for positive definite Lagrangian systems, Math. Z 207 (1991), p. 169-207.

[30] Mather J., Variational construction of connecting orbits, Ann. Inst. Fourier 43 (1993), p. 1349-1386.

[31] Moser J., *Stable and random motions in dynamical systems (with a special emphasis in celestial mechanics*, Ann. Math. Stud. 77, Princeton Univ. Press, 1973.

[32] Moechel R., Transition tori in the five body problem, J. Diff. Equ. 129 (1996), p. 290-314.

[33] Moechel R., Generic drift on Cantor sets of annuli, preprint 2000.

[34] Newhouse S., Palis J., *Cycles and bifurcation theory*, Asterisque 31, Soc. Math. France, p. 43-140, 1976.

[35] Niederman L., Dynamics around a chain of simple resonant tori in nearly integrable Hamiltonian systems, J. Diff. Equ. 161, no. 1, p. 1-41, 2000.

[36] Palis J., On morse-Smale dynamical systems, Topology 8, (1969), p. 385-405.

[37] Palis J., De Melo W., *Geometric theory of dynamical systems, an introduction*, Springer-Verlag, (1982).

[38] Pöschel J., Nekhoroshev estimates for quasi-convex Hamiltonian systems, Math. Z. 213 (1993), p. 187-216.

[39] Rayskin V., Tangential homoclinic intersection in $\mathbb{R}^n$, preprint, 2000.

[40] Rudnev M., Wiggins S., Existence of exponentially small splittings and homoclinic connections between whiskered tori in weakly hyperbolic near-integrable Hamiltonian systems, Physica D, 1998.

[41] Treschev D., The mechanism of destruction of resonance tori of Hamiltonian systems, Russ. J. Math. Phys. 2, 1, 1994.

[42] Yoccoz J-C., Travaux de Herman sur les tores invariants, Sem. Bourbaki, no. 754, 1992.

[43] Wiggins S., *Global bifurcations and chaos*, Springer-Verlag, 1988.

[44] Xia J., Arnold diffusion in the elliptic restricted three-body problem, J. Dynamics and Differential Equations 5 (2), (1993)

[45] Xia J., Arnold diffusion and oscillatory solutions in the planar three-body problem, J. Diff. Equations 110 (1994), p. 289-321.

[46] Xia J., Arnold diffusion : a variational construction, Documenta mathematica, extra volume ICM 1998, 11, (1998), p. 867-877.

Chapitre 2

Autour du problème du centre et du calcul moulien de Jean Ecalle

Publications associées

[T1] Formes normales et problème du centre symétrique (avec B. Schuman), C. R. Acad. Sci. Paris, t. 327, Série I, p. 581-584, 1998.

[T2] Formes normales et problème du centre (avec B. Schuman), Bull. Sci. Math. 125, 3 (2001), p. 235-252.

[T3] Obstruction à la linéarisation des champs de vecteurs polynomiaux, à paraître au Can. Math. Bull, 2001.

[T4] Calcul moulien (avec un avant-propos de Jean Ecalle), 82.p, preprint, 2001.

Ce mémoire regroupe 4 articles (dont 3 sont publiés) autour du problème du centre et du calcul moulien développé par Jean Ecalle depuis les années 70. Le texte qui suit est une réflexion sur ces travaux, qui, je l'espère, éclaire la démarche que j'ai empruntée pour aborder ce problème. Par ailleurs, j'ai inséré quelques idées de développements et conjectures.

2.1 Le problème du centre

On considère les champs de vecteurs polynomiaux du plan de la forme

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{2.1}$$

où P et Q sont des polynômes de degré au plus $n \geq 2$.

La partie linéaire X_l de X est un centre. Toutes les orbites de X_l sont périodiques et situées sur des cercles centrés en zéro.

PROBLÈME DU CENTRE : *Trouver les conditions nécessaires et suffisantes sur les coefficients de P et Q, pour lesquelles le champ de vecteur (2.1) a toutes ses orbites périodiques dans un voisinage de* 0.

Dans le cas où toutes les orbites périodiques sont de même période, on parle du problème du centre isochrone. L'existence d'un centre isochrone revient à étudier la linéarisation du champ X (voir [6],thm.5.2.8).

Il est impossible de faire le tour de tous les travaux concernant le problème du centre. On peut seulement faire un constat : la résolution du problème a peut avancé. On connait les conditions de centre pour le cas quadratique, cubique homogène ... mais aucun résultat général ne se dégage.

La raison tient, à mon avis, à l'absence d'une structure algébrique intéressante sur la variété du centre. Jusqu'à présent, on sait simplement que c'est une variété algébrique.

Par ailleurs, les méthodes jusqu'ici utilisées ne permettent pas de dégager cette structure, si ce n'est de façon artificielle (par exemple, en se limitant au cas hamiltonien pour l'étude de l'isochronisme).

Le problème du centre peut être vu comme une première étape dans le 16 ème problème de Hilbert. La relation entre les deux problèmes se fait via l'idéal de Bautin [22], qui est contenu dans l'idéal des polynômes qui s'annulent sur la variété du centre, appelé idéal de Dulac. Le nombre de générateurs de l'idéal de Bautin permet, via un théorème de Roussarie [15], de borner le nombre de cycles limites du champ qui apparaissent après une petite perturbation polynomiale du champ.

2.2 La méthode

2.2.1 Formes normales et nihilence

Nous avons utilisé la méthode des formes normales pour aborder le problème du centre. On sait, par un théorème de Moussu-Malgrange, que X est un centre si et seulement si il admet une intégrale première formelle (non triviale). Le champ satisfait donc une condition de nihilence totale suivant la terminologie d'Ecalle.

On commence par mettre le champ (2.1) sous forme préparée, via un changement de variable complexe $z = x + iy$, $i^2 = -1$:

$$X = i\left(z\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) + P(z,\bar{z})\frac{\partial}{\partial z} + \overline{P(z,\bar{z})}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \tag{2.2}$$

où $P(z,\bar{z})$ est un polynôme à coefficients complexes. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des coefficients de P.

Il est possible de retranscrire la nihilence dE X directement sur une forme prénormale associée. C'est l'objet du §.2.2 de [T2]. On démontre que la variété du centre est une variété algébrique, décrite par une famille de polynômes en les variables $\mathcal{A}$ (§.3.1 de [T2]). On appelle ces polynômes, des *polynôme du centre.*

Cette idée a été initiée par jean-pierre Françoise [7].

2.2.2 Le théorème de décomposition

Etudier la variété du centre, c'est déterminer les invariants associés.

Dans la note [T1], nous avons mis en évidence une action $\mathcal{T}$ de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathcal{A}$, telle que la variété du centre soit invariante sous $\mathcal{T}$.

L'invariance des polynômes du centre sous l'action de $\mathcal{T}$, n'est que la traduction du caractère résonant des formes prénormales de X.

Quel est le rôle de l'action $\mathcal{T}$?

Elle permet de décomposer tout monôme $\mathcal{T}$-invariant en produit d'un nombre *fini* de monômes que nous avons appellé *universels*. C'est le *théorème de décomposition*.

L'invariance d'un monôme sous $\mathcal{T}$ donne une *équation diophantienne linéaire*, qui caractérise les degrés admissibles (voir §.4.1 de [T2]).

Il est toujours possible de trouver une base des solutions d'une équation diophantienne linéaire via un algorithme (voir [20]). Néanmoins, il n'existe pas de formules générales donnant cette base, l'équation diophantienne linéaire étant donnée. C'est justement ce point, qui empéche Sibirsky [16] de démontrer le théorème de décomposition, alors qu'il a observé la $\mathbb{C}^*$-invariance.

Comment obtenir une base ?

Le caractère réel du champ, qui se traduit par une symétrie particulière de la perturbation en coordonnée complexe, permet de passer d'une équation diophantienne linéaire à un réseau (voir [T2], §. 4.2.2, p. 247). Or pour ces derniers, la détermination d'une base *explicite* est possible.

2.3 Formes prénormales et calcul moulien

2.3.1 Sur le caractère universel du théorème de décomposition

La différence essentielle entre la note [T1] et l'article [T2] est l'utilisation du calcul moulien de jean Ecalle pour expliciter les polynômes du centre.

Quels avantages le langage d'Ecalle apporte-t-il dans ce problème ?

C'est essentiellement suite à des remarques lors de différents exposés que nous avons décidé d'utiliser le langage des moules-comoules.

Dans un premier temps, il s'agissait de répondre aux questions d'universalité des monômes universels et de la construction de ces monômes dans le cas des difféomorphismes et des champs de vecteurs. Nous affirmions alors que notre construction était valable quel que soit le champ de vecteur résonant et quel que soit l'objet analytique local considéré, champ de vecteur ou difféomorphisme.

Cette universalité est cachée par le procédé de construction classique de la forme normale de Poincaré-Dulac, qui fait croire que l'idée même de l'action de $\mathbb{C}^*$ est dépendante de celle ci.

Le langage des moules-comoules permet de clarifier la situation. La $\mathbb{C}^*$ invariance se voit sur toute forme prénormale, que l'objet soit un difféomorphisme ou un champ de vecteur, pour la bonne raison que l'expression des polynômes mis en jeux est de même nature algébrique.

2.3.2 Niveaux de lecture des conditions de centre

Par ailleurs, il est apparu que les expressions explicites des polynômes de la variété du centre, permettent de définir une classification naturelle des conditions de centre. Ce point est important.

La classification habituelle de ces conditions se fait via le type d'intégrale première auquelles elles sont associées : de type Darboux, polynomiales , ... etc. C'est essentiellement dans cette voie que Mardesic et Rousseau ont travaillé [14].

Néanmoins, des conditions aussi banales que la condition hamiltonienne ou réversible (en reprenant la terminologie de Françoise et pons [9]), possèdent le même type d'intégrale première, alors qu'elles sont de nature algébrique complétement différentes.

Quelle est cette nature algébrique ?

La nature d'une condition de centre, dans l'approche des formes normales, dépend de sa *lecture*. Le niveau de lecture d'une condition se comprend intuitivement de la manière suivante : jusqu'à quel degré de compréhension de la forme normale doit-on aller pour attraper cette condition, i.e. démontrer par des arguments algébriques que les polynômes du centre s'annulent ?

C'est dans cet esprit que nous avons formulé le *problème de lecture* au §.5 de [T2].

Le problème venait de note incapacité à démontrer, directement sur les polynômes du centre, le fait que les conditions hamiltoniennes les annulaient bel et bien. C'était d'autant plus décourageant que le cas hamiltonien est trivial dans le cas du centre, une intégrale première étant par définition donnée.

Les monômes universels ne permettaient pas, à eux seuls, de démontrer l'annulation de ces polynômes comme c'était le cas pour les centres réversibles. Il se passait donc quelque chose, mais quoi ?

Notre compréhension des polynômes du centre était manifestement insuffisante dans la version de [T1]. D'où l'idée de les expliciter plus finement via le langage des moules-comoules.

Ce travail fait l'objet du §.2.1.2 de [T2].

La décomposition moule-comoule des polynômes du centre fait apparaître naturellement trois niveaux de complexité.

Le premier est celui de la $\mathbb{C}^*$-invariance, i.e. les conditions de type réversible, qui dépendent essentiellement de l'équation diophantienne linéaire d'invariance. La structure interne des polynômes n'intervient pas. Ce sont les conditions de complexité algébrique les plus faibles. Cette remarque est importante et sous-tend une conjecture sur le nombre de conditions algébriques minimales nécessaire pour avoir la nihilence.

Le second, est le domaine des comoules. C'est la combinatoire de ces comoules qui donnent des conditions de centre. Les cas les plus simples sont étudiés par Schuman dans un article [19].

Le troisième niveau est celui ou moules et comoules jouent à fond. Autrement dit, il est nécessaire d'entreprendre l'étude de l'algèbre de Lie. Ce dernier cas est difficile. Typiquement, la condition $a_{11} = 0$ dite des "*axes invariants*" dans le cas quadratique rentre dans ce cadre.

Je ne pense pas qu'il soit possible de caractériser ces trois niveaux de lecture sans le recour au langage des moules-comoules, sauf peut être après coup.

L'idée des niveaux de lecture que j'ai résumée plus haut n'est pas contenue dans les articles de ce mémoire. J'ai par contre exposé ces différents points dans le groupe de travail sur les champs de vecteurs polynomiaux que je co-organisais avec bertrand Schuman en 1998 à Paris VI.

2.3.3 Une conjecture

Les conditions de centre réversible sont, du point de vue algébrique, les plus simples et les seules, par définition, de niveau I. Dans [3], jean Ecalle et dana Schlomiuk posent la question suivante :

QUESTION : *Pour un degré n donné, quel est le nombre minimal de relations algébriques , nil(n), assurant la nihilence ?*

La question est posée dans le cadre général des champs de vecteurs résonants.

CONJECTURE : *Dans le cas homogène de degré n, le nombre nil(n) est égal au nombre de conditions algébrique du centre réversible.*

C'est vrai dans le cas quadratique et cubique homogène.

2.3.4 L'aspect algorithmique et implémentation

Le langage des moules et comoules se prette très bien au calcul formel. En utilisant un premier programme qu'avait écrit bruno Vallet (Orsay), j'ai développé en 1999 avec bernard Tessier, alors ingénieur de recherche à Besançon, un programme de calcul formel sur Maple, calculant les formes prénormales de champ de vecteurs et la correction. Il serait bon de le finaliser et de le mettre en libre service sur le web.

Le programme permet déja de faire des tables des polynômes du centre pour les petits degrés.

2.4 Géométrie des variétés du centre

2.4.1 Variétés binomiales

Les articles [T1] et [T2] sont des préliminaires algébriques indispensables à l'étude géométrique de la variété du centre. La conjecture, qui ressort de ces articles est la suivante :

CONJECTURE : *Soit X un champ de la forme (2.2) et P un polynôme homogène. On note c(n) le nombre de coefficients $a_{i,j}$ du polynôme P. La variété du centre est une variété binomiale, i.e. définie par une famille finie d'équations de la forme $a_1x^{\nu_1} = a_2x^{\nu_2}$, où a_1 et a_2 sont des constantes rationnelles, et ν_1, $\nu_2 \in \mathbb{N}^{c(n)}$, sont des multientiers invariants sous l'action de $\mathcal{T}$ associée à X.*

Dans le cas non homogène, la situation me semble moins claire.

Remarque. La structure de la variété du centre n'a rien de binomiale si on reste dans l'espace des coefficients réels. Il semble donc que le bon cadre de travail soit la formulation (2.2), i.e. de travailler sur un espace de coefficients complexe.

La conjecture est évidemment vraie pour les cas connus.

2.4.2 Variétés toriques

La géométrie de la variété du centre rentre donc, si la conjecture est vraie, dans une classe particulière de variétés.

Quelles sont ces variétés ?

Fin 1998, j'avais écrit à B. Sturmfels pour avoir son avis. Il m'a envoyé son article [3] sur les idéaux binomiaux, qui donne une correspondance entre certains types de *variétés toriques* et ces idéaux. Pour une introduction aux variétés toriques, voir ([11],[21],[5]).

Je n'ai pas étudié plus avant cette relation. Lucy Jauslin-Moser (Dijon) a établi que les variétés du centre quadratique et cubique homogène sont des variétés toriques, dans un sens plus général que la définition de Sturmfels (il impose une condition de normalité). Ce travail reste donc à faire.

Dans ce cadre, on peut se poser la question suivante : quelle est la nature des coefficients a_1, a_2 ? Ont-ils une signification géométrique, topologique, autre ?

Il me semble que la question précédente est importante, indépendamment du problème du centre.

On peut aussi considérer ce problème du point de vue des bifurcations. On se donne une famille paramétrée de variétés binomiales. Pour quelles valeurs des paramètres a-t-on un changement significatif de la géométrie ?

L'idée est que les variétés du centre, correspondant à des valeurs rationnelles particulières des paramètres, peuvent se caractériser par ces changements de géométrie.

Une mise en forme précise de ces idées doit être faite en collaboration avec M. ElKaoui de l'université de Marrakech cette année.

2.5 Stratification isochrone des conditions de centre

L'article [T3] entre dans le cadre de l'étude de la stratification isochrone de la variété du centre. Une condition de centre étant donnée (reversible, Darboux, Hamiltonienne ...), on cherche les conditions de linéarisation de ces centres. Les centres reversibles étant de niveau I, on s'attend à trouver une grande partie des conditions de centre isochrones dans cette strate. C'est justement ce que confirme le travail de [T3].

2.5.1 Travaux de Schuman et Gavrilov

En 1996, bertrand Schuman avait montré qu'il n'existait pas de centre isochrone hamiltonien homogène autre que trivial. Il a par la suite généralisé ce résultat en obtenant des conditions d'obstruction à l'isochronisme des centres hamiltoniens. Il utilise pour cela une construction explicite de la forme normale de Birkhoff.

Par ailleurs, lubomir Gavrilov [13] travaille sur une caractérisation géométrique de l'isochronisme des centres hamiltoniens via une étude de la fibre de la fonction de hamilton des champs linéarisables de $(\mathbb{C}^2, (x, y))$. L'étude de l'homologie évanescente $H_1(H^{-1}(z), \mathbb{Z})$ de la surface de Riemann associée à $H^{-1}(z)$ permet de formuler la conjecture suivante :

Conjecture : *Si $H(x, y)$ est un hamiltonien polynomial isochrone, alors le cycle évanescent en zéro de la fibre $H^{-1}(z)$ est homologue à zéro.*

Les travaux précédents semblent montrer que l'isochronisme hamiltonien, ou la caractérisation des obstruction à l'isochronisme dans ce cas, est particulière à la classe hamiltonienne, i.e. fait intervenir clairement les symétries des champs hamiltoniens.

2.5.2 Champs de vecteurs à dépendance linéaire et correction

Dans [T3], j'ai montré qu'en fait cette propriété d'obstruction à la linéarisation est vérifiée par la classe des champs de vecteurs à dépendance linéaire, introduite dans ([T3], §.3).

Les champs de vecteurs à dépendance linéaire s'étudient très bien et correspondent aussi bien au cas hamiltonien, qu'au cas Darboux des conditions de centre. L'approche de Gavrilov perd tout son sens pour ces champs. La vrai nature de l'obstruction à l'isochronisme, même dans le cas hamiltonien, est algébrique.

L'obstruction à l'isochronisme se lit au premier ordre de la *correction* du champ ([T3], proposition 1,p.7), notion introduite par Ecalle-Vallet dans [4].

Pourquoi avoir utilisé la correction ?

On peut obtenir des conditions de linéarisation aussi via les formes prénormales. Néanmoins, au niveau algébrique, la correction possède des symétries qui simplifient considérablement les polynômes de linéarisation. Je renvoie à la remarque du §.2.2 de [T3] pour plus de détails.

2.6 Calcul moulien

2.6.1 La raison d'être du texte

Les différents textes que j'ai rédigé sur le problème du centre ou le centre isochrone font appel au langage des moule-comoule de jean Ecalle. La raison est simple : ce langage permet de faire ressortir les véritables spécifités d'un problème (le problème du centre par exemple est un problème de nihilence de champs résonants et n'est donc pas lié au caractère 2 dimensionnel) et évite ainsi de se poser de faux problèmes.

Il va sans dire que ce langage n'est pas adopté par la communauté des "spécialistes travaillant sur le problème du centre", commme me l'a fait remarqué un referee d'une note sur le critère de nihilence.

Par ailleurs, les différents referee demandaient "l'intérêt qu'il y avait à transposer dans un langage abstrait et incomprehensible" des problèmes par ailleurs bien compris dans les théories classiques de formes normales. J'espère que les paragraphes précédent répondent à cette question.

C'est dans cette atmosphère que j'ai entrepris la rédaction de [T4], qui devait servir de référence à un article, toujours en préparation, sur les objets satellites des champs de vecteurs polynomiaux. Toujours est-il que [T4] m'a demandé plus de temps que prévu, ceci en raison du colloque sur la "conjecture de Deligne-Ihara et nombres polyzetas" organisé par leila Schneps au CIRM en avril 2000. Les travaux de jean Ecalle sur les multizetas montraient une nouvelle fois la puissance du langage des moule-comoule dans les problèmes algébriques et combinatoires. Le texte que je préparais alors pris une nouvelle dimension. Alors qu'il était destiné aux "spécialistes" des champs de vecteurs, ils devaient maintenant s'adressait à un public plus large, venant de l'algèbre.

C'est dans ce sens que j'ai donc rédigé l'article [T4].

2.6.2 Dérivations, automorphismes et symétries des moules

Les résultats nouveaux de ce texte apparaissent dans la section "Une démonstration alternative de la symétrie de quelques moules".

Les lemmes 21 et 24 sont des versions générales de résultats utilisés par Ecalle dans ses différents travaux. C'est d'ailleurs lui qui m'a suggéré ces énoncés. Les démonstrations que je propose sont purement combinatoires. Ces lemmes permettent de démontrer la symétralité ou la symétrélité des moules sans calcul sur les suites (pour se donner une idée de la difficulté des calculs sur les suites, je renvoie à ([T4], §.6)).

Il n'en reste pas moins que le statut des dérivations sur l'algèbre des moules n'est pas encore très clair du point de vue des schémas en groupe. Si on travaille sur une algèbre de Hopf par exemple, je ne sais pas ce que représente ces dérivations dans le groupe associé. La question se pose aussi pour les automorphismes.

2.6.3 Champs de vecteurs et difféomorphismes

Le dernier paragraphe, sur les formes normales de champs de vecteurs et difféomorphismes, répond aux différentes questions que les rapporteurs de mes articles avaient posées (par exemple, la classique forme normale de Poincaré-Dulac est-elle une forme prénormale ?).

J'espère qu'il est maintenant clair que les notions introduites dans [T2] fonctionnent quel que soit l'objet analytique résonant étudié, champ de vecteur ou difféomorphisme, en dimension deux ou non.

Bibliographie

[1] Dulac H, Détermination et intégration d'une certaine classe d'équations différentielles ayant pour point singulier un centre, Bull. Sci. Math. 32 (2), 1908, p. 230-252.

[2] Ecalle J, Schlomiuk D, The nilpotent part and distinguished form of resonant vector fields or diffeomorphisms, Ann. Inst. Fourier 43 (1993), p. 1407-1483.

[3] Eisenbud D, Sturmfelds B, Binomials ideals, Duke Math. Journal, Vol. 84, no. 1, p. 1-45, 1996.

[4] Ecalle J, Vallet B, Correction and linearization of resonant vector fields and diffeomorphisms, Math. Z., 229 (1998), p. 249-318.

[5] Ewald G, *Combinatorial geometry and algebraic geometry*, Graduate Texts in Math. 168, Springer-Verlag, 1996.

[6] Farkas M, *Periodic motions*, Springer Verlag, Berlin, 1994.

[7] Françoise J-P, Birkhoff normal forms and analytic geometry, dans *Symplectic singularities and geometry og gauge fields*, Banach center publ. 39, Polish Acad. Sci., Warzawa, 1997, p. 49-56.

[8] Françoise J-P, Successive derivatives of a first return map, application to the study of quadratic vector fields, Ergodic theory and Dynamical systems 16 (1996), p. 87-96.

[9] Françoise J-P, Pons R, Une approche algorithmique du problème du centre pour des perturbations homogèes, Bull. Sci. Math., 120, 1996, p. 1-17.

[10] Fronville A, Singularité résiduelle et problème du centre, Thèse, Paris VI, 1996.

[11] Fulton W, *Introduction to toric varieties*, Princeton Univ. Press, Annals of Math. Studies 131, 1993.

[12] Gaeta G, Poincaré renormalized forms, Ann. Inst. Poincaré, Vol. 70, no. 6, 1999, p. 461-514.

[13] Gavrilov L, Isochronicity of plane polynomial Hamiltonian systems, Nonlinearity 10 (1997), p. 433-448.

[14] Mardesic P, Rousseau C, Toni B, Linearization of isochronous centers, J. Diff. Equ. 121, (1995), p. 67-108.

[15] Roussarie R, Cyclicité finie des lacets et des points cupsidaux, Nonlinearity 2, p. 73-117, 1989.

[16] Sibirsky K.S, *Invariants algébriques des équations différentielles et matrices,* Schtrintsa, Kishinev, 1976.

[17] Schlomiuk D, Algebraic and geometric aspects of the theory of polynomial vector fields, 429-467, in : Bifurcations and periodic orbits of vector fields (D. Schlomiuk, ed.), 1993, Kluwer Acad. Publ., NATO ASI Series, Series C, Vol. 408.

[18] Schuman B, Sur la forme normale de Birkhoff et les centre isochrones, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, t. 322, (1996), p. 21-24.

[19] Schuman B, Une classe d'hamiltoniens polynomiaux isochrones, à paraître au Canad. Math. Bull, 2001.

[20] Schrijver A, *Theory of linear and integer programming,* Wiley-Interscience series in discrete math, 1986.

[21] Teissier B, Variétés toriques et polytopes, Séminaires Bourbaki 565, 1980/81, Lect. Notes. Math. 901, p. 71-84, 1981.

[22] Yakovenko S, A gemetric proof of Bautin theorem, in : Concerning the Hlbert sisteenth problem, Amer. Math. Soc. Transl., Serie 2, 165, p. 203-219, 1995.

Chapitre 3

Théorie des nombres et oscillateurs

"L'idée que notre connaissance est illimitée est une idée bornée.
L'idée que notre connaissance est bornée a des conséquences illimitées."
Edgar Morin

Publications associées

[T1] Geometry and dynamics of numbers under finite resolution (avec J-N. Dénarié), Lect. Notes in Physics, p. 205-325, 2000.

[T2] Close to resonance interaction of radiofrequency waves in a Chottky diode mixer : $1/f$ noise and number theory (avec M. Planat, D. Dos Santos, S. Perrine, N. Ratier), dans "Quantum $1/f$ noise and other low frequency fluctuations in electronic devices", edited by A. Chung and P. Handel, AIP press (1999), p. 177-187.

[T3] $1/f$ noise in a communication receiver and the Riemann hypothesis (avec M. Planat, S. Dos Santos, S. Perrine), dans "15th International conference on noise in physical systems and $1/f$ fluctuations", edited by C. Surya, Bentham Press (1999), p. 409-412.

[T4] The readout of time, continued fractions and $1/f$ noise (avec M. Planat), présenté au 3th European Congress of Mathematics, 2000.

[T5] Superheterodyning system, diophantine approximation and continued fractions, (avec M. Planat), 2001.

Ce mémoire regroupe 5 articles dont 3 sont publiés. Ces travaux sont issus d'une collaboration avec michel Planat du Laboratoire de Physique et Métrologie des oscillateurs à Besançon, débutée en septembre 1997. Le thème de la théorie des nombres et des oscillateurs se distingue des 3 autres thèmes abordés dans cette thèse, par le fait qu'il est lié à des résultats de physique expérimentale, pour lesquels il n'existe pas de théories physique et mathématique satisfaisantes.

3.1 Système superheterodyne de Armstrong et Schottky

Le système superhétérodyne de Armstrong et Schottky date de 1924. Il est constitué de deux oscillateurs, couplés via un mélangeur, dont on filtre les hautes fréquences du signal de sortie par un filtre passe-bas de fréquence de coupure donnée. L'ensemble de ce système sera noté **D** dans la suite, comme "détecteur".

On introduit deux signaux à l'entrée de **D**, $s_0(t)$ et $s_1(t)$, dont l'un est de fréquence stable f_0 appelé oscillateur local, et l'autre de fréquence $f_1(t)$, appelé oscillateur de référence. On étudie alors la fréquence du second oscillateur via le système superhétérodyne.

On peut aussi refermer le système. On obtient ainsi une boucle de phase avec un phénomène de blocage aux résonances. Je reviendrai sur ce point plus tard.

Comprendre le système superhérodyne, c'est donner une interprétation physique satisfaisante du spectre des fréquences et du spectre des amplitudes du signal de sortie. De plus, on doit pouvoir prévoir la forme de ces spectres.

Quelles sont les données de travail de départ ?

Michel Planat a fait des expériences de mesure précises du spectre des fréquences du signal de sortie, ainsi que du spectre des amplitudes. Il a fait varier le paramètre de coupure du filtre passe-bas pour voir son influence. Il a par ailleurs aussi étudier la boucle de phase. On a donc à notre disposition, toute une palette de résultats d'expériences qu'il convient d'interpréter et de placer dans un cadre mathématique suceptible de faire des prévisions.

Quelles sont les approches classiques ?

Habituellement, pour étudier l'évolution dynamique d'un système, on écrit, lorsque c'est possible, une équation différentielle. On peut écrire une équation différentielle pour le système superhétérodyne, moyennant des conditions sur la forme du signal de sortie après le mélangeur. Le mélangeur a été initialement creé pour faire un "produit" des deux signaux d'entrée. Malheureusement, les mélangeurs idéaux n'existent pas et ils ont un comportement dynamique relativement compliqué. Pour faire un bon modèle, il est nécessaire de rentrer dans la construction même du mélangeur (par exemple, comportement de diodes ..etc). Le nombre des composants électroniques, ainsi que leurs complexités, empêchent un modèle réaliste d'être obtenu, même au niveau formel. Autrement dit, même la mise en forme de l'équation différentielle est difficile.

On peut bien sûr faire un modèle simplifié. Mais jusqu'à présent, ces modèles se sont révélés insatisfaisants (sauf pour expliquer certains phénomènes locaux très stables comme les zônes d'accrochage des résonances).

3.2 Vers une nouvelle approche

Les remarques précédentes nous incitent à aborder le problème différemment. Une première idée est d'avoir une approche "statique" à la construction du spectre des fréquences et du spectre des amplitudes. On essaie de reconstruire globalement ces spectres, mais on a aucune information sur la manière dont la fréquence et l'amplitude du signale bougent au cours du temps.

3.2.1 Le détecteur diophantien

On sait que le mélangeur ne fait pas que le produit des deux signaux, mais une opération plus complexe, qui fait apparaître des harmoniques, i.e. des combinaisons des deux fréquences d'entrée de la forme

$$qf_1(t) - pf_0, \quad \text{et aussi} \quad qf_1(t) + pf_0, \tag{3.1}$$

avec $(q,p) \in \mathbb{N}^2$. Dans le cas où le mélangeur est idéal, on a seulement $p = q = 1$ comme harmonique.

La remarque précédente est en partie expériementale, en partie théorique.

Il reste ensuite à faire agir le filtre passe-bas de fréquence de coupure f_c sur ces harmoniques de sortie. On obtient ainsi une équation contrôlant les fréquences de sortie admissibles sous les conditions du système, à savoir

$$\mid qf_1(t) - pf_0 \mid < f_c. \tag{3.2}$$

On ne considère pas en général la seconde équation, qui correspond à des fréquences plus élevées.

L'équation (3.2) ne suffit pas, à elle seule, à déterminer le spectre des fréquences. On a besoin d'une hypothèse sur la nature des approximations effectuées par le détecteur **D** : décimale ou diophantienne ?

Si les approximations sont décimales, on n'observe pas le spectre expérimental. L'hypothèse que nous avons faite est que le détecteur sélectionne les fréquences comme en approximation diophantienne [1].

HYPOTHÈSE DIOPHANTIENNE : *L'approximation des fréquences se fait via les approximations diophantiennes des nombres réels.*

Cette hypothèse donne des contraintes très fortes sur les fréquences admissibles dans (3.2).

On note $\nu(t)$ la fréquence normalisée $\nu(t) = f_1(t)/f_0$, alors l'équation (3.2) devient

$$\left|\nu(t) - \frac{p}{q}\right| < \frac{f_c}{f_0 q}. \tag{3.3}$$

Sous l'hypothèse diophantienne, le nombre p/q est forcémment un convergent de ν. On oublie un moment la dépendance en t de ν. On note $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ le développement en fractions continues de ν et $p_i/q_i = [a_0, \ldots, a_i]$ le i-ème convergent de ν. L'équation (3.3) donne, sous l'hypothèse diophantienne, l'équation

$$\left|\nu - \frac{p_i}{q_i}\right| < \frac{f_c}{f_0 q_i} \le \frac{1}{a_{i+1} q_i^2}. \tag{3.4}$$

Cette contrainte traduit l'approximation diophantienne. Elle a par ailleurs des conséquences sur les harmoniques admissibles, ainsi que sur les fréquences. En effet, de simples calculs montrent que le développement en fraction continue de la fréquence doit vérifier ([T5],theorem 1) :

$$a_{i+1} < a_{max} = \left[\frac{f_0}{f_c q_i}\right], \quad q_i \le q_{max} = \left[\frac{f_0}{f_c}\right], \tag{3.5}$$

[1] La formulation qui suit, exposée dans [T5] est récente. Je l'ai exposée au séminaire de théorie des nombres de Besançon en juillet 2000. L'idée des approximations était présente dans nos divers travaux avant cette date. Nous avions déja toutes les contraintes, mais celles-ci ne découlaient pas rigoureusement d'un principe mathématique. C'est maintenant un théorème sous une hypothèse unique.

où $[x]$ désigne la partie entière de x.

L'hypothèse diophantienne se vérifie expérimentalement de deux manières [T4] :

- en mesurant le paramètre de troncature des fréquences. On obtient bien la relation $a_{max} = [f_0/f_c q_i]$.

- en mesurant l'erreur d'approximation $\mu = \nu - p_i/q_i$. On obtient bien $\mu = 1/a_{i+1}q_i^2$.

A ma connaissance, c'est la première fois qu'un système électronique réel "fait" de l'approximation diophantienne. En général, l'approximation diophantienne s'introduit via la dynamique, par exemple dans l'étude du nombre de rotation (plus généralement, le problème des petits diviseurs), pour des raisons analytiques. Ici, c'est le système lui même qui impose l'approximation diophantienne. Il est possible que ce résultat soit lié à une propriété physique profonde de notre univers....en tout cas, c'est mon intuition.

3.3 Ensemble de résolution

Pour construire le spectre des fréquences, il suffit maintenant de déterminer l'ensemble des nombres réels satisfaisant les contraintes (3.5). Une remarque d'importance est que la contrainte sur les quotients partiels a_i est fixe dans la classe des rationnels de la forme p/n, $n \in \mathbb{N}^*$ donné. Ceci nous conduit naturellement à la construction des rationnels de Farey.

3.3.1 L'arbre de Farey

L'ensemble de Farey d'ordre n, noté $\mathcal{F}_n$, est constitué des fractions irréductibles p/q dont le dénominateur n'excède pas n. Par conséquent, la fraction $p/q \in \mathcal{F}_n$ si $0 \leq p \leq q \leq n$ et $(p,q) = 1$. Par exemple, l'ensemble $\mathcal{F}_5$ est constitué des rationnels 0, 1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 4/5, 1. On passe de $\mathcal{F}_n$ à $\mathcal{F}_{n+1}$ en construisant les médiants de deux rationnels consécutifs de $\mathcal{F}_n$: si p/q et p'/q' sont deux rationnels consécutifs de $\mathcal{F}_n$, alors le rationnel $p+p'/q+q'$ est dans $\mathcal{F}_{n+1}$. Dans l'ensemble $F_n = \mathcal{F}_n \setminus \mathcal{F}_{n-1}$ le dénominateur des fractions est n. On peut donc chercher à construire l'ensemble des nombres satisfaisant (3.5) par récurrence sur n, en considérant les rationnels dans F_n.

3.3.2 Fractions continues à quotients partiels bornés

Dans [T1], nous avons exploré la géométrie de l'ensemble des fractions continues dont les quotients partiels sont uniformément bornés par une constante a donnée, noté $\mathcal{R}_a$. Cet ensemble de fraction a une structure très particulière, mais on sait finalement peut de choses dessus. Par exemple, on ne sait pas si cet ensemble contient des algébriques de degré ≥ 3. La conjecture est qu'il n'y en a pas. Par contre, on a récemment construit des exemples explicites de nombres transcendants dans $\mathcal{R}_a$ (voir [10],[1],[2]).

Quelle est la caractéristique principale de l'ensemble $\mathcal{R}_a$ par rapport à $\mathbb{R}$?

Pour tout nombre réel x, on note x_a le nombre obtenu en tronquant la fraction continue de x au premier quotient partiel $> a$. On défini ainsi une application $r_a : \mathbb{R} \to \mathcal{R}_a$, appelée application de résolution.

Le point essentiel est l'existence d'un phénomène de blocage au voisinage des rationnels dont les quotients partiels sont bornés. Précisément, pour tout rationnel $p/q = [w_0, \dots, w_n]$ dans $\mathcal{R}_a$, il existe deux rationnels $\nu_+(p/q)$ et $\nu_-(p/q)$, définis par $\nu_+(p/q) = [w_0, \dots, w_n, a]$ et $\nu_-(p/q) = [w_0, \dots, w_n - 1, 1, a]$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ dans l'intervalle défini par ces deux rationnels, on a $x_a = p/q$.

Bien d'autres propriétés existent et sont détaillées dans [T1].

Le phénomène de blocage que nous observons ici, purement arithmétique, est d'une tout autre nature que le phénomène de blocage aux résonances en dynamique.

On peut aussi construire un escalier du diable ([T1],§.3.1) à la Arnold pour le nombre de rotation.

Le point important à mon avis est le suivant : la contrainte de résolution sur les quotients partiels est source de structure et de phénomènes nouveaux (le blocage par exemple). Ces structures permettent de hiérarchiser l'ensemble des nombres rationnels de $\mathcal{R}_a$: on peut leur associer un poids, qui est la taille de leur zône de blocage. Cette hiérarchie influence tout système évoluant sur $\mathcal{R}_a$.

Lorsque a tend vers l'infini, ces structures disparaissent, laissant place à un monde amorphe, où tous les nombres jouent le même rôle. A un moment ou les ordinateurs prennent une place de plus en plus importante dans les calculs numériques, il me semble qu'il faut avoir conscience des effets d'une contrainte de résolution sur les nombres.

3.3.3 Dynamique des nombres

L'idée de dynamique des nombres est apparue dans [T1]. Nous étudions alors le bord des zônes de blocage des rationnels de $\mathcal{R}_a$. Ce bord possède d'étonnantes propriétés et nécessite l'introduction d'une dynamique naturelle des nombres dans $\mathcal{R}_a$, dynamique qui elle aussi disparait lorsque a tend vers l'infini. Les zônes bordant les zônes de blocages s'appellent des zônes transitoires. Je renvoie à ([T1],§.4.2) pour plus de détails. Disons simplement que les zônes transitoires et de blocage s'accumulent sur des irrationnels, dont certains peuvent se caractériser (les quadratiques par exemple). On les obtient comme point fixe d'un système dynamique discret dans $\mathbb{R}$ particulier, ce qui permet d'introduire des notions naturelles de stabilité et d'instabilité d'irrationnels dans $\mathcal{R}_a$ (voit [T1],p.317). Ce point est encore préliminaire, mais l'idée d'une dynamique naturelle des nombres lorsqu'on a une contrainte de résolution me parait importante. Cette dynamique traduit d'ailleurs essentiellement les propriétés d'approximation des irrationnels par les rationnels.

3.3.4 Les ensembles de résolution tronqués

La seconde contrainte de (3.5) implique l'existence d'un seuil dans la longueur des fractions continues adimissibles (voir [T5]). Par conséquent, il est nécessaire d'étudier les phénomènes nouveaux, induits par cette limitation dans la construction de l'ensemble de résolution $\mathcal{R}_a$, en fixant une longueur maximale $n \in \mathbb{N}^*$ des fractions continues de $\mathcal{R}_a$. Ce point est étudié dans ([T1],§.5) et conduit à la notion de zône floue. C'est essentiel, lorsqu'on impose une contrainte sur la longueur des fractions admissibles, alors certaines zônes de $\mathbb{R}$ ne sont pas atteintes. Au niveau de la physique l'existence de ces zônes est troublante : cela veut dire que le système, si il arrive dans une de ces zônes, fait quelque chose, mais qu'il est impossible de savoir quoi.....

3.3.5 Le spectre des fréquences

Les résultats des paragraphes précédents permettent de rendre compte complétement du spectre des fréquences expérimental, dans ses moindre détails. Reste que la dynamique proprement dite du spectre des fréquences n'est pas encore claire. Ce point est abordé dans [T5] via la fonction de Brujno. Par ailleurs, michel Planat a développé une théorie purement arithmétique de cette dynamique dans [8].

3.4 Spectre d'amplitude et hypothèse de Riemann

Le spectre des amplitudes est loin d'être compris. Contrairement aux fréquences, où l'action du mélangeur est purement linéaire, l'amplitude du signal mélangé est hautement non linéaire en les amplitudes d'entrée, même dans le cas du mélangeur idéal.

Cette non linéarité donne lieu à un spectre d'amplitude très compliqué. L'approche arithmétique est alors moins claire.

3.4.1 Via le critère de Weyl et la répartition uniforme modulo 1

La relation entre le spectre d'amplitude et l'hypothèse de Riemann se fait via la série de Farey. On sait que cette série de nombre est uniformément distribuée modulo 1 (voir [6],[3],[7]). On a donc, via le critère de Weyl, pour toute fonction à valeur réelle, définie sur l'intervalle $[0,1]$, l'égalité

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\phi(N)} \sum_{n=1}^{\phi(N)} f(x_n) = \int_0^1 f(x)dx, \tag{3.6}$$

où $\phi(N)$ est le cardinal de l'ensemble de Farey d'ordre N.

L'écart entre la série et l'intégrale peut se quantifier. Si f est continue, alors l'hypothèse de Riemann est équivalente à l'inégalité [3]

$$\sum_{n=1}^{\phi(N)} f(x_n) - \phi(N) \int_0^1 f(x)dx \leq N^{1/2+\epsilon}, \tag{3.7}$$

pour tout $\epsilon > 0$.

La série de Farey est naturelle dans notre problème via la construction du spectre des fréquences. Par ailleurs, pour récupérer l'amplitude du signal il est nécessaire de calculer les intégrales

$$\int_{-\tau}^{\tau} f(x)e^{-i\nu x}dx, \tag{3.8}$$

où τ est un temps d'observation, et ν la fréquence.

D'autre part, michel Planat a observé une relation entre les écarts de Frasnel-Landau [4] et le spectre d'amplitude (voir [T3]). Il faut tout de même noter que cette relation n'est pas physiquement démontrée.

J'aimerai faire une remarque à ce niveau : on peut bien entendu commencer une réflexion sur la fonction zeta ou toutes les fonctions attachées de près ou de loin à l'hypothèse de Riemann. C'est intéressant en soi. Présenter ces travaux comme une avancée dans le problème physique est autre chose. Il n'y a pas de relation formelle entre l'hypothèse de Riemann et le spectre des amplitudes observé. Or, si relation il y a, elle doit avoir une signification profonde. C'est sur ce point, en tant que recherche pluridisciplinaire, qu'il faut se concentrer.

3.5 Un commentaire sur l'interdisciplinarité

Contrairement aux autres thèmes de la thèse, les questions, le cadre et même parfois les notions abordées ne sont pas claires, ce qui explique la mise en place très lente du cadre de pensée.

Mais tout l'intérêt de ses travaux interdisciplinaires est là : construire un langage, des outils et une structure, là où il n'y avait que brumes et chaos. J'aimerai que ce texte encourage les chercheurs à se lancer dans ce type d'aventure.

Bibliographie

[1] Allouche J-P., Gazette des mathématiques, no. 84, p. 19-35.

[2] Allouche J-P., Davison J., Queffelec M., Zamboni L., Transcendence of sturmian or morphic continued fractions, preprint 2000.

[3] Amoroso F., Distribution de la suite de Farey, hypothèse de Riemann et hauteur normalisée de certaines courbes, exposé au colloque "Théorie des nombres, bruit des fréquences et télécommunications", IHP, Décembre 1999.

[4] Edwards H.M., *Riemann's zeta function*, Academic Press, 1974.

[5] Georgelin Y., Masson T., Wallet J-C., Visibility diagrams and experimental stripe structures in the Quantum Hall effect, J. Phys. A : Math. Gen. 33 (2000) 8649-8662.

[6] Kuipers L., Niederreiter H., *Uniform distribution of sequences*, Wiley-Interscience Publication, 1974.

[7] Mikolas M., Sur l'hypothèse de Riemann, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, p. 633-636, 1949.

[8] Planat M., $1/f$ noise, the measurement of time and number theory, Fluctuation and noise letters, Vol.1, no. 1, 2001.

[9] Planat M., Eckert C., On the frequency and amplitude spectrum and the fluctuations at the output of a communication receiver, IEEE Trans. on Ultranson. Feroel. and Freq. Cont. 47 (2000), p. 1173-1182.

[10] Queffelec M., Transcendance des fractions continues de Thue-Morse, Journal of number theory 73 (1998), p. 201-211.

Chapitre 4

Des fonctions continues non différentiables à la théorie de la relativité d'échelle

Il y a cent ans, une pareille fonction eut été regardée comme un outrage au sens commun.
(Poincaré 1899, *L'oeuvre math. de Weierstrass*, Acta Math., vol. 22, p. 5)

La physique des espaces-temps fractals, c'est la physique de l'infini...
(L. Nottale, *La relativité dans tous ses états*, Hachette, 1998)

Publications associées

[T1] About non differentiable functions (avec F. Ben Adda), à paraître dans J. Math. Ana. and Appl.

[T2] Divergence d'échelle et différentiabilité (avec F. Ben Adda), C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Serie I, p. 261-264, 2000.

[T3] Scale relativity theory for one dimensional non differentiable manifolds, à paraître dans Chaos, Solitons and Fractals

[T4] Lois d'échelle des fonctions de classe $\mathcal{C}^{\alpha}$ (avec F. Ben Adda), soumis aux CRAS

[T5] Fractional differential equations and the Schrödinger's equation (avec F. Ben Adda), soumis à J. Math. Ana. and Appl.

[T6] Quantum derivatives and Schrödinger's equation (avec F. Ben Adda), soumis à Lett. Math. Phys.

[T7] Non differentiability of functions versus differentiability, preprint

[T8] Calcul fractionnaire, variétés fractales et relativité d'échelle (avec F. Ben Adda), prépublication 2000/11 de l'équipe de Math. de Besançon, 93.p, 2000.

Ce mémoire regroupe 8 articles (dont 3 sont publiés ou à paraître) sur le thème de l'analyse des fonctions continues non différentiables et de la relativité d'échelle développée par l'astrophysicien Laurent Nottale. Il est important de préciser le but de nos travaux sur les fonctions non différentiables, car la théorie de la relativité d'échelle a guidé non seulement la mise en forme des problèmes, mais aussi le point de vue adopté.

Je vais d'abord détaillé le contenu des articles traitant des questions purement mathématiques sur les fonctions continues non différentiables. J'aborderai ensuite les applications à la relativité d'échelle.

4.1 Fonctions continues non différentiables

4.1.1 Un peu d'histoire

L'histoire des fonctions continues non différentiables est récente. Je reprend ici une partie du livre de E. Hairer et G. Wanner, *L'analyse au fil de l'histoire*, Springer, 2000.

Jusqu'à l'époque de Riemann et Weierstrass, on croyait que toute fonction continue était différentiable, à l'exeption possible de quelques points singuliers. On trouve même, en 1806, une démonstration de ce fait par A.M. Ampère (J. Ecole polytechnique, vol. 6, p.148). C'est Riemann qui le premier, construit une fonction continue non différentiable sur un ensemble de points partout dense. C'est ce résultat qui ouvre la voie à la recherche de fonctions continues *nulle part* différentiables. Vers 1861 (voir Weierstrass 1872), Riemann aurait déclaré que la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2x^2)}{n^2}, \tag{4.1}$$

qui est continue, n'est nulle part différentiable. Weierstrass se dit incapable de démontrer cette affirmation, et Gerver prouve en 1970, que cette fonction est différentiable en certains points.

L'existence de fonctions continues non différentiables est définitivement établi par Weierstrass en 1872. Il démontre après deux pages de calcul que la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n x), \tag{4.2}$$

qui converge uniformément pour $b < 1$, n'est nulle part différentiable si $ab > 1 + (3\pi/2)$. De nombreux exemples vont alors être crées (Hilbert, 1871, von Koch, 1906, Takagi, 1903).

C'est le même Weierstrass qui porte un coup sérieux à l'intérét de ces fonctions. Il démontre le théorème d'approximation qui porte son nom, et qui assure que toute fonction continue peut être rendue différentiable aussi souvent qu'on veut, ou même en faire un polynôme, à condition d'admettre une erreur ϵ arbitrairement petite.

Ces fonctions sont progressivement délaissées. La communauté mathématique juge les construction de Weierstrass, Lebesgue et bien d'autres, comme des créations artificielles qui n'auront jamais la moindre importance, ni en mathématique ni ailleurs.

C'est la physique, ou plus généralement la nature, qui rappelle à l'ordre les mathématiciens. Ainsi, en 1906, Jean Perrin écrivait : "Si l'on trace un segment reliant les positions occupées par une même particule à des instants rapprochés, on observe que la direction de ce segment varie de façon totalement irrégulière quand on réduit l'intervalle de temps correspondant. Un observateur impartial en déduira qu'il a affaire à une fonction non dérivable plutôt qu'à une courbe possédant une tangente." J. Perrin va même plus loin en proposant l'abandon de la continuité.

De nos jours, les fonctions continues non différentiables sont courantes, aussi bien en physique, qu'en sciences de l'ingénieur (travaux de A. Le Mehauté par exemple). Un exemple d'importance dans notre étude, est celui des trajectoires de particules en mécanique quantique, décrites via des courbes partout sans tangente par Feynman et Hibbs dans les années 60. Néanmoins, malgré cette obliquité, l'analyse de ces fonctions est restée difficile et en grande partie insatisfaisante.

4.1.2 Autour du calcul fractionnaire

On décrit nos principales contributions dans le domaine du calcul fractionnaire et de ses applications à l'analyse des fonctions continues non différentiables.

Calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire a une longue histoire, qui commence dès 1695 avec Leibniz et le début du calcul différentiel classique. C'est en fait par pure curiosité qu'il tente de donner un sens à un opérateur de la forme d^α/dx^α, où α est un réel. Il s'en suit une longue série de travaux sur le sujet, dûs notamment à Euler, Liouville, Riemann ou Lagrange. Le sujet est très vaste. Une première synthèse se trouve dans le livre d'Oldham et Spanier [18]. Il est impossible de citer tous les travaux existants depuis sur le sujet. Nous renvoyons à l'encyclopédie de Nishimoto [11] pour plus de références. Pour les applications, on renvoie au travail de Le Mehaute [13].

Nous avons principalement étudié le calcul fractionnaire de Riemann-Liouville. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Pour tout $x \in [a,b]$, on définit l'intégrale à gauche (resp. à droite) de Riemann-Liouville au point x par

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_{a,-}(f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \\ I^{\alpha}_{b,+}(f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \end{aligned} \tag{4.3}$$

respectivement. La dérivée à gauche (resp. à droite) de Riemann-liouville de f au point x s'en déduit par

$$D^{\alpha}_{a,-}(f)(x) = \frac{dI^{1-\alpha}_{a,-}(f)(x)}{dx},\ D^{\alpha}_{b,-}(f)(x) = \frac{dI^{1-\alpha}_{b,+}(f)(x)}{dx}, \tag{4.4}$$

respectivement.

Bien entendu, on obtient des valeurs pour la dérivée de Riemann-Liouville qui sont différentes suivant les valeurs des paramètres a et b. On parle du problème de *non localité* de la dérivée de Riemann-Liouville. Par ailleurs, la dérivée d'une constante $C \in \mathbb{R}$ est non nulle. Par exemple, on a

$$D^{\alpha}_{a,-}(C)(x) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{(x-a)^{\alpha}}. \tag{4.5}$$

Ces deux remarques sont à la source de l'absence d'une interprétation géométrique satisfaisante (voir néanmoins [2]) de la dérivée de Riemann-Liouville. En particulier, il est difficile de relier la géométrie locale du graphe de f avec ses dérivées.

Une manière de palier à ces difficultées est de *localiser* la dérivée de Riemann-Liouville. C'est cette idée, d'abord proposée par Kolvankar et Gangal [10], que nous avons développée dans l'article [T1].

Dérivée fractionnaire locale

L'idée, très simple, consiste à faire tendre le paramètre de la dérivée de Riemann-Liouville vers le point de dérivation. Précisément, on pose

$$d^{\alpha}_{\sigma} f(x) = \lim_{y \to x^{\sigma}} D^{\alpha}_{x,-\sigma}[\sigma(f - f(x))](y),\ \sigma = \pm. \tag{4.6}$$

On a évidemment recollement à la dérivée classique lorsque $\alpha \to 1$. Le résultat important de ([T1],Theorem 2.1) est l'équivalence entre la définition précédente de la dérivée fractionnaire locale au point x et de l'expression

$$d^{\alpha}_{\sigma} f(x) = \Gamma(1+\alpha) \lim_{y \to x^{\sigma}} \frac{\sigma(f(y) - f(x))}{\mid y - x \mid^{\alpha}}. \tag{4.7}$$

La démonstration repose sur un développement de Taylor généralisé ([T1],theorem 2.2).

La dérivée fractionnaire locale (droite et gauche) se relie facilement au comportement höldérien local de la fonction. Par suite, elle est d'une interprétation géométrique élémentaire.

A l'aide de cet outil, il est possible de généraliser un grand nombre de résultats classiques de l'analyse (Role, Taylor,...). Je renvoie à [T1] pour plus de détails.

Par ailleurs, nous avons introduit la notion de α-dérivée, qui regroupe les informations sur la dérivée fractionnaire à droite et à gauche :

$$(f)^{\alpha}(x) = \frac{d^{\alpha}_{+} f(x) + d^{\alpha}_{-} f(x)}{2} + i \frac{d^{\alpha}_{+} f(x) - d^{\alpha}_{-} f(x)}{2}. \tag{4.8}$$

Cet opérateur se relie convenablement à la dérivation classique. C'est le bon objet pour l'étude locale des fonctions α-dérivables.

4.1.3 Applications de la dérivation fractionnaire locale

Divergence des graphes de fonctions et différentiabilité

Soit Γ le graphe d'une fonction continue f sur un intervalle $[a, b]$. On note $L(\Gamma)$ la longueur de Γ. Si $L(\Gamma)$ est finie, alors la fonction sous jascente est presque partout différentiable par un théorème de Lebesgue (voir [20]).

Dans [16], Nottale pose le problème suivant : on suppose que la longueur de Γ est infinie. Peu-on savoir si la fonction sous jascente est différentiable ou non ?

Pour la courbe, on doit parler de rectifiabilité afin d'être dans le cadre le plus général.

La réponse, obtenue dans [T2] est la suivante : On regarde la divergence du graphe de f suivant un paramètre de lissage ϵ. Ce paramètre $\epsilon > 0$ fixé, on construit la courbe polygonale d'approximation P_{ϵ} associée à f par le compas (voir [20] pour la définition). On note $L_{\epsilon}(\Gamma)$ la longueur de P_{ϵ}.

Théorème 1 *Soit f une fonction continue, définie sur un intervalle $[a,b]$. Si $L_\epsilon(\Gamma) = O(1/\epsilon^\delta)$, $\delta > 0$, alors il existe un sous arc de Γ sur lequel f n'est pas différentiable presque partout.*

Nous avons étudié via le calcul fractionnaire locale, développé dans [T1], la vitesse de divergence des graphes de fonctions de classe $\mathcal{C}^\alpha$, $0 < \alpha < 1$. On trouve $\delta = 1/\alpha - 1$.

Il existe aussi une plage de divergence dans laquelle on ne sait pas si la courbe est rectifiable ou non.

Théorème 2 *Soit Γ une courbe de paramétrisation $\gamma(t)$ définie pour tout $t \in [a,b]$, telle que $L_\epsilon(\Gamma) = O(\log(1/\epsilon))$, alors Γ peut être rectifiable ou non.*

La démonstration est basée sur des exemples explicites à la Von Kock.

Lois d'échelles

La notion de loi d'échelle s'est naturellement imposée dans l'étude de la divergence des graphes de fonctions, comme contre partie analytique à l'approche géométrique précédente.

Définition 3 *Soit f une fonction continue, définie sur $I = [0,1]$, à valeur réelle. Pour tout $\epsilon > 0$, on note f_ϵ sa fonction moyenne. On dit que f satisfait une loi d'échelle, si il existe une fonction $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, telle que pour tout $\epsilon > 0$, on a $\dfrac{dL(f_\epsilon)}{d\log\epsilon} = E(L(f_\epsilon))$.*

Le problème est de déterminer la fonction d'échelle E associée à une classe de fonction donnée si elle existe. Dans [T4], on résout ce problème dans le cadre des fonctions de classe $\mathcal{C}^\alpha$, sous une hypothèse technique sur le reste de f dans son développement de Taylor généralisé. On trouve que la fonction d'échelle est donnée par

$$E(x) = (\alpha - 1)x + O(x^2). \tag{4.9}$$

L'hypothèse la plus forte ici est de rester dans le cadre des équations différentielles ordinaires classiques.

Equations différentielles fractionnaires

Une équation fractionnaire est de la forme

$$(y)^\alpha = f(y,t), \tag{4.10}$$

où $y(t)$ est une fonction réelle, et f est une fonction à valeur complexe. La difficulté de ce type d'équation est que, contrairement à l'opérateur de Riemann-Liouville qui possède un opérateur inverse évident, nous n'avons pas réussi à obtenir l'analogue de l'intégrale pour notre calcul fractionnaire.

Il est néanmoins possible d'obtenir quelques résultats, dont le plus important est le suivant ([T5], theorem 5.11) :

Théorème 3 *Les équations fractionnaires $(y)^{\alpha} = a(t)$ et $(y)^{\alpha} = ia(t)$, avec $a(t)$ une fonction de classe C^{γ}, $\gamma > \alpha$, et $a(t) \neq 0$, n'ont pas de solutions.*

Ce théorème permet de discuter le type d'équation que l'on peut obtenir via le principe de relativité d'échelle à partir de l'équation fondamentale de la dynamique. Dans [T6], nous avions, sous certaines contraintes, obtenu l' équation de Schrödinger.

Cette contrainte revient à l'existence d'une fonction vérifiant une équation fractionnaire de la forme $(y)^{\alpha} = C$ ou $(y)^{\alpha} = iC$, C une constante. D'après le théorème 3 c'est impossible.

On en déduit que si le principe de relativité d'échelle est vrai, l'équation de Schrödinger n'est qu'une approximation d'une équation plus générale dont la forme est discutée dans [T5].

Géodésiques des variétés fractionnaires

Une notion de variété fractale est discutée dans ([T8],chap.3). On construit deux prototypes de variétés fractales, la sphère de Weierstrass et la sphère fractale de Riemann. Ces deux exemples sont importants car pour la première l'indice de différentiation fractionnaire est constant, alors qu'il varie pour la seconde.

On développe la notion de champ de vecteurs et l'analogue d'une connexion linéaire pour ce type d'objet. On en déduit, en supposant que les géodésiques d'une variété fractale s'obtiennent via ces connexions linéaires généralisées, qu'il existe une infinité de géodésiques sur une variété fractale. C'est une des hypothèses fondamentales de la théorie de la relativité d'échelle.

4.1.4 Non différentiabilité des fonctions versus différentiabilité

La physique, et plus particulièrement, la relativité d'échelle de L. Nottale, nous encourage à adopter un nouveau point de vue sur l'étude des fonctions continues non différentiables (et plus généralement des variétés non différentiables).

Pour comprendre l'origine de ce point de vue, nous allons citer quelques passages du livre de Brian Greene ([9], chap.5, p.149-153) sur l'incompatibilité fondamentale entre la mécanique quantique et la relativité générale.

La source de cette incompatibilité est la suivante :

"aux échelles microscopiques, la violence des fluctuations du monde quantique invalide l'hypothèse centrale de la relativité générale puisque l'espace n'est plus lisse. La clef de voûte de la théorie quantique - les relations d'incertitude - entre ici en conflit direct avec celle de la relativité générale - un espace(-temps) géométriquement lisse."

Quelles sont les fluctuations dont parle Greene ? Il s'explique à la page 149.

"Si l'on cherche à marier relativité générale et mécanique quantique, il faut opérer un changement d'échelle radical et scruter les propriétés *microscopiques* de l'espace. Les premiers agrandissements ne donnent pas grand-chose : la structure de l'espace ne change pas. Dans un cadre purement classique, ce calme plat persisterait jusqu'aux échelles les plus petites possibles. Mais cette conclusion est réfutée par la théorie quantique : absolument tout est sujet aux fluctuations inhérentes au principe d'incertitude. ... Ses fluctuations conduisent donc à des distorsions de plus en plus violentes de l'espace ..."

Dans cette description des fluctuations quantiques de l'espace-temps, plusieurs choses se mélangent : le fait d'observer à une échelle donnée, et l'hypothèse qu'il existe un objet limite à observer dont on capte les propriétés via des observations à des échelles différentes, la propriété étudiée ici étant la régularité.

C'est essentiellement cette façon d'aborder les fonctions non différentiables que nous avons développée dans [T7], après les tentatives de [T2],[T6] et [T3]. Cela nous a conduit à plusieurs concepts.

Représentation et fonctions fractales

Ces idées sont tirées de [T3] et [T7]. La notion de représentation traduit le fait qu'en physique, on a accès non à l'objet lui même, mais à une représentation, obtenue par des mesures. Pour une fonction, cela veut dire que sa représentation est différentiable presque partout et qu'elle dépend d'un paramètre (précision de la mesure). On est donc conduit à :

Définition 4 *Soit f une fonction continue à valeur réelle. Une représentation de f est* *une famille à un paramètre $f(t,\epsilon)$ de fonctions presque partout différentiables, telles que $f(t,\epsilon)$ converge simplement vers f lorsque ϵ tend vers zéro.*

On peut par exemple, prendre la fonction moyenne $f_\epsilon(t) = \frac{1}{2\epsilon}\int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} f(s)ds$, ou la courbe polygonale d'approximation de f construite au compas avec un pas de ϵ.

Bien que cette notion soit bien adaptée à une étude mathématique des fonctions non différentiables, il est nécessaire d'introduire une seconde notion :

Définition 5 *Une fonction fractale est une famille à un paramètre de fonctions $f(t,\epsilon)$ presque partout différentiables, telle qu'il existe une fonction f continue non différentiable, vers laquelle $f(t,\epsilon)$ converge simplement lorsque ϵ tend vers zéro.*

L'idée sous-jascente est que l'objet limite est inaccessible. Autrement dit, la fonction limite existe, mais il n'est pas évident d'en avoir une expression explicite.

Des fonctions fractales sont construites dans ([T3], definition 9), en suivant le travail de Nottale [15].

ϵ-différentiabilité et résolution minimale

Ces deux notions sont introduites dans [T4] et [T6]. Elles sont modifiées dans [T7].

Le problème principal, une représentation étant donnée, est le suivant : quand peut-on savoir que la fonction sous-jascente est non différentiable ?

Autrement dit, quand faut-il prendre en compte la non différentiabilité de la fonction limite ?

Pour répondre à cette question, il est nécessaire d'introduire un critère de différentiabilité dépendant de la jauge d'observation.

Définition 6 *Soit $h > 0$ un réel, et f une fonction continue. La fonction f est dite ϵ-h différentiable au point t si*

$$a_\epsilon f(t) = \left| \frac{f(t+\epsilon) + f(t-\epsilon) - 2f(t)}{\epsilon} \right| < h. \tag{4.11}$$

Cette quantité mesure la différence entre $(f(t+\epsilon) - f(t))/\epsilon$ et $(f(t) - f(t-\epsilon))/\epsilon$ lorsque ϵ tend vers zéro. Pour une fonction différentiable, cette quantité va tendre vers zéro. Dans le cas d'une fonction non différentiable, on va avoir une divergence de l'ordre de ϵ^α, où α

est l'exposant de hölder de f au point t.

La notion de résolution minimale s'impose :

Définition 7 *Soit $h > 0$, et f une fonction continue. La h-résolution minimale de f au point t, notée $\epsilon(f,h)(t)$ est donnée par* $\inf_\epsilon \{a_\epsilon f(t) < h\}$.

Pour une fonction dérivable, cette résolution minimale est évidemment nulle. La traduction de cette notion est la suivante : Pour $\epsilon > \epsilon(f,h)$, on peut utiliser une représentation différentiable. Pour $\epsilon < \epsilon(f,h)$, les effets de la non différentiabilité sont trop importants et il est nécessaire de les prendre en compte.

Je renvoie à [T7] pour plus de détails.

Différentielles quantiques et différentielle d'échelle

Prendre en compte la non différentiabilité, c'est, suivant la définition de la résolution minimale, savoir que les dérivées des fonctions moyennes à droite et à gauche, définies par

$$f^\epsilon_+(t) = \frac{1}{2\epsilon}\int_t^{t+\epsilon} f(s)ds, \text{ et } f^\epsilon_-(t) = \frac{1}{2\epsilon}\int_{t-\epsilon}^{t} f(s)ds, \tag{4.12}$$

respectivement, sont différentes. On définit les dérivées quantiques droite et gauche comme

$$\nabla^\epsilon_+ f(t) = \frac{f(t+\epsilon)-f(t)}{\epsilon},\ \nabla^\epsilon_- f(t) = \frac{f(t)-f(t-\epsilon)}{\epsilon}, \tag{4.13}$$

respectivement.

La définition de [T6] est plus rigide car on fixe ϵ à la résolution minimale.

De nouveau, l'étude locale de f nécessite de connaître ces deux valeurs, ce qui conduit à la dérivée d'échelle

$$S^\epsilon f(t) = \frac{1}{2}(\nabla^\epsilon_+ f(t) + \nabla^\epsilon_- f(t)) - i\frac{1}{2}(\nabla^\epsilon_+ f(t) - \nabla^\epsilon_- f(t)),\ i^2 = -1. \tag{4.14}$$

C'est cette dérivée qui intervient en relativité d'échelle. On renvoie à [T6] et [T7] pour plus de détails.

Le résultat important est une expression approchée de la dérivée d'échelle d'une fonction $f(x(t),t)$, où $x(t)$ est une fonction höldérienne (et inverse höldérienne) d'exposant $1/2$, et $f(x,t)$ est une fonction à valeur réelle de classe C^2. Dans ce cas, on trouve

$$\nabla^\epsilon_\sigma f(x(t),t) = (\nabla^\epsilon_\sigma x(t))\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma\epsilon\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\nabla^\epsilon_\sigma x(t))^2 + o(\epsilon),\ \sigma = \pm. \tag{4.15}$$

C'est cette formule qui permet d'obtenir l'équation de Schrödinger via l'équation de la dynamique en relativité d'échelle (voir [T6] et [T7]). On note au passage que terme dominant correspond à la formule d'Itô en calcul stochastique.

Bigèbre quantique et déformation

Dans [T7], on introduit la notion de bigèbre quantique, en vue de comparer ces opérateurs aux dérivations classiques. Ce travail est encore préliminaire.

Le premier pas est de trouver l'identité "à la Leibniz" que vérifie un opérateur quantique. Un simple calcul montre que

$$\nabla_\sigma^\epsilon(fg) = \nabla_\sigma^\epsilon f.g + f\,\nabla_\sigma^\epsilon g + \sigma\epsilon\,\nabla_\sigma^\epsilon f\,\nabla_\sigma^\epsilon g. \tag{4.16}$$

Il est alors possible de munir l'algèbre $\mathbb{R}\langle\langle\nabla_+^\epsilon,\nabla_-^\epsilon\rangle\rangle$ des séries formelles construitent sur l'alphabet $\{\nabla_+^\epsilon,\nabla_-^\epsilon\}$, d'une structure de bigèbre, en suivant une démarche présentée dans [4] dans le cas des algèbres de lie de dérivations. Précisément le coproduit est donné par

$$\Delta(\nabla_\sigma^\epsilon) = \nabla_\sigma^\epsilon\otimes Id + Id\otimes\nabla_\sigma^\epsilon + \sigma\epsilon\,\nabla_\sigma^\epsilon\otimes\nabla_\sigma^\epsilon\,. \tag{4.17}$$

C'est la seconde partie du coproduit qui "casse" la dérivation. Lorsque $\epsilon = 0$ on retrouve une dérivation classique. D'où l'idée, que cette bigèbre quantique doit être envisagée comme une "déformation" d'une bigèbre classique construite sur les dérivations.

Représentation quantique et géométrie non commutative

L'idée de représentation quantique est simple. On veut rendre compte géométriquement de la dérivée d'échelle, i.e. expliquer pourquoi on a un dédoublement en terme réel et un terme complexe. Une première construction, très préliminaire est esquissée dans [T7], en suivant des éléments de [T6].

On commence par noter que pour $\epsilon \leq \epsilon(f,h)$, la résolution minimale, on doit prendre en compte les dérivées quantiques droite et gauche, et pas seulement la dérivée de la moyenne. Cela revient, géométriquement, à considérer non plus le graphe de la fonction moyenne, mais deux graphes, celui des fonctions moyenne droite et gauche. Autrement dit, la prise en compte de la nature non différentiable de l'objet limite, implique un dédoublement naturel de l'espace.

Définition 8 *Soit $h > 0$, f une fonction continue non différentiable et $\epsilon(f,h)$ sa résolution minimale. On note Γ_+^ϵ, Γ_-^ϵ et Γ_ϵ les graphes de la fonction moyenne droite, moyenne* *gauche et moyenne respectivement. La représentation quantique de f, notée $Q_\epsilon(f)$ est définie comme $Q_\epsilon(f) = \Gamma_\epsilon$ si $\epsilon > \epsilon(f,h)$ et $Q_\epsilon(f) = \Gamma_+^\epsilon \cup \Gamma_-^\epsilon$ sinon.*

Pourquoi cette représentation géométrique est-elle importante ? Parce qu'elle souligne la nécessité d'une nouvelle approche pour étudier les propriétés de non différentiabilité lorsque $\epsilon \leq \epsilon(f,h)$.

On peut résumer la propriété essentielle de $Q_\epsilon(f)$ lorsque $\epsilon \leq \epsilon(f,h)$ via le modèle suivant : $Q = M \times \{a,b\}$, où M est une variété différentiable et $\{a,b\}$ est un espace discret de deux points. Alors, $Q = M_a \cup M_b$ est constitué de deux copies de M dont la distance dépend de la distance entre a et b.

Ce modèle géométrique est étudié par Connes [3], dans son approche du modèle standard via la géométrie non commutative. Notre travail étant lié à la relativité d'échelle de Nottale, il semble qu'un lien formel puisse être établi entre le travail de Connes et l'approche de Nottale. Notamment, il semble possible de justifier le choix fait par Connes d'un espace temps dédoublé (dans sa version la plus simple) via l'hypothèse de non différentiabilité de l'espace-temps, hypothèse elle, de nature physique.

4.2 Relativité d'échelle

La relativité d'échelle, développée depuis le début des années 80 par Laurent Nottale à l'Observatoire de Paris-Meudon, vise à réconcilier et harmoniser les équations de la physique quantique et de la relativité générale. Le "principe unificateur" n'est autre que le principe de relativité d'Albert Einstein.

En 1916, Einstein énonce le principe de relativité : "Les lois de la nature doivent être valides dans tous les systèmes de référence, quel que soit leur état.". Le principe de relativité d'échelle de Nottale généralise se postulat : "Les lois de la nature s'appliquent quel que soit le mouvement, mais aussi quelle que soit l'échelle du système de coordonnées".

Cette prise en compte des échelles s'effectue via un affaiblissement de la régularité de l'espace-temps. Dans la relativité générale d'Einstein, l'espace-temps est une variété riemanienne, donc différentiable. Nottale suppose que l'espace-temps est fractal, i.e. non différentiable, mais conserve la continuité. On reste donc dans le cadre des variétés topologiques. Par ailleurs, les physiciens s'accordent sur cette perte de régularité de l'espace-temps aux échelles atomiques, comme le rapelle Greene [9], ou Cohen-Tannoudji et Spiro

[6].

Les articles importants dans cette directions sont ceux de Feynman et Hibbs [8] dans les année 60 et celui entre-autre de Abbott et Wise [1]. Dans les deux cas, ils démontrent que les trajectoires des particules sont génériquement non différentiables.

Après avoir identifié la nature de l'espace-temps, il reste à développer les outils d'analyse de ces espaces. C'est ici que Nottale propose une approche nouvelle. Le fait que l'espace-temps soit non différentiable implique qu'il est naturellement dépendant d'échelle, i.e. que son observation à des échelles de plus en plus petites fait apparaître toujours de nouvelles structures. C'est cette remarque qui permet de faire des équations différentielles dans un espace-temps fractal (non différentiable). En fixant une échelle de résolution on rétablit du même coup la différentiabilité, la non différentiabilité n'étant qu'un phénomène limite à l'échelle nulle. On reconnait ici la démarche développée dans la première partie du mémoire. Il est intéressant de rappeler la phrase d'Einstein (lettre à Pauli, 1948) :

"Je vous ai dit plus d'une fois que je suis un partisan acharné non pas des équations différentielles, mais bien du principe de relativité générale, dont la force heuristique nous est indispensable. Or, en dépit de bien des recherches, je n'ai réussi à satisfaire le principe de relativité générale autrement que grâce à des équations différentielles; peut être quelqu'un découvrira-t-il une autre possibilité, s'il cherche avec assez de persévérance."

Cette possibilité, c'est l'utilisation des fonctions (variétés) fractales, i.e. des fonctions explicitement dépendantes d'un paramètre qui serait l'échelle, et dont la limite, inconnue, est une fonction non différentiable.

Nottale développe un calcul adapté à ces fonctions fractales, notamment la dérivée d'échelle. Il déduit alors l'équation de Schrödinger de l'équation fondamentale de la dynamique de Newton, en appliquant le principe de relativité d'échelle. Une reinterprétation de la mécanique quantique en terme d'espace-temps et de relativité est donc possible. Notamment, la dualité onde-corpuscule, n'est qu'une traduction du caractère non différentiable de l'espace-temps.

Par ailleurs, il identifie de nouvelles constantes universelles, l'échelle de Planck et l'échelle cosmologique, qui joue le rôle d'horizon (au sens de Cohen-Tannoudji par exemple [5]) pour les longueurs, comme la vitesse de la lumière .

Il y a bien sur des applications à la cosmologie, dont je ne parlerai pas, mais qui sont suffisamment importantes et confirmées expérimentalement pour justifier tout travail théorique en vue d'établir de manière claire les fondements de cette théorie.

4.2.1 Equation de Schrödinger et équation fondamentale de la dynamique

C'est l'objet de l'article [T6]. L'article démontre, en supposant que le principe de relativité d'échelle est valable, que la dynamique des particules est donnée par l'équation fondamentale de la dynamique, où la dérivation temporelle est remplacée par la dérivée d'échelle, et la vitesse habituelle par la vitesse dédoublée, prenant en compte la non différentiabilité. On obtiens bien l'équation de Schrödinger, moyennant quelques hypothèses techniques qui sont par ailleurs développées dans [T5]. Il faut noter que cette nouvelle démonstration de l'équation de Schrödinger n'a rien à voir avec celle discutée par Feynman [7].

4.2.2 Relativité restreinte d'échelle pure

La relativité restreinte d'échelle pure est le premier pas vers la relativité restreinte d'échelle, car elle ne considère que les effets en espace-échelle. Le temps y est encore supposé absolu. Travailler dans un espace-échelle demande une définition précise des systèmes de coordonnées. C'est l'objet de l'article [T3].

Construction des systèmes de coordonnées

Cette construction est donnée dans [T3]. On suppose que la variable d'espace bouge sur le graphe d'une fonction continue non différentiable f.

Sur une courbe de ce type, on ne peut pas, par le théorème de Lebesgue, construire de coordonnée curviligne classique (faisant intervenir la longueur). En utilisant la représentation (voir 1.4.1) de cette courbe par une courbe moyenne Γ_ϵ, à une résolution donnée, on lève ce problème. On obtient ainsi une famille X_ϵ de coordonnées curvilignes, sur les courbes Γ_ϵ.

Il faut aussi fixé une origine des résolutions, origine devant prendre en compte la transition différentiable-non différentiable, traduite par la résolution minimale $\epsilon(f, h)$. On peut donc définir la variable d'échelle $E(\epsilon) = \ln(\epsilon/\epsilon(f, h))$.

Les variables logarithmiques et le djinn

On introduit la variable logarithmique $\mathcal{X} = \ln X$. Du point de vue analytique, cette variable permet d'exprimer plus simplement la dépendance en échelle (je renvoie à ([15],p.218) pour une justification faisant référence au modèle standard).

Nous avons besoin de la variable *djinn*, définie comme

$$\delta = 1 - \alpha, \tag{4.18}$$

où α est la classe de régularité de f, supposée constante ici. La variable djinn est analytiquement reliée à la dimension fractale d de la courbe, via la relation $d = 1 + \delta$.

Alors, en utilisant les résultats du §.1.3.2, on a $\frac{d\mathcal{X}}{dE} = \delta$, $\frac{d\mathcal{X}}{d\delta} = -S$, où S est une translation dans l'espace des échelles.

Par ailleurs, si on note $S_{1/0}$ et $S_{2/1}$, la translation en échelle du système 1 par rapport au système 0, et celle du système 2 par rapport au système 1, on a

$$S_{2/0} = S_{2/1} + S_{1/0}. \tag{4.19}$$

Relativité d'échelle restreinte pure et l'échelle de Planck

L'idée de Nottale est de généraliser ces équations, via le principe de relativité, la variable δ, jouant le rôle de la variable de temps. On obtient alors

$$\mathcal{Y}' = \frac{\mathcal{Y} - S\delta}{\sqrt{1 - (S^2/\mathcal{L}^2)}}, \quad \delta' = \frac{\delta - S(\mathcal{Y}/\mathcal{L}^2)}{\sqrt{1 - (S^2/\mathcal{L}^2)}}, \tag{4.20}$$

où $\mathcal{L}$ est une constante.

Il est possible de préciser la nature de cette constante. On pose $\mathcal{L} = \ln(\epsilon(f,h)/\Lambda)$. Le résultat surprenant est que Δ, qui est une résolution, est un horizon indépassable pour les résolutions (voit [T3]).

Par ailleurs, divers travaux permettent d'identifier la résolution minimale et la constante Λ. La première est la longueur de *De Broglie* de la particule considérée, la seconde est la longueur de Planck $\Lambda = \sqrt{\hbar g/c^3}$, où $\hbar$ est la constante de Planck réduite, g est la constante gravitationelle, et c est la vitesse de la lumière.

Bien entendu, beaucoup reste à faire, même dans le cadre restreint. Seul le cas pure est abordé ici (i.e. sans prise en compte du temps). Les prédictions de Nottale, et la nouvelle vision de l'univers qui en découle, donnent de bonnes raisons de s'investir dans cette longue tache.

[17] L. Nottale, *La relativité dans tous ses états*, Hachette, 1998.

[18] K.B. Oldham, J. Spanier, *The fractional calculus*, Academic press, 1974.

[19] G. Ord, A geometric analogue of relativistic quantum mechanics, J. Phys. A, 1983, 16, p. 1869-1884.

[20] C. Tricot, *Courbes et dimension fractale*, 2nd édition, Springer-Verlag, 1999.