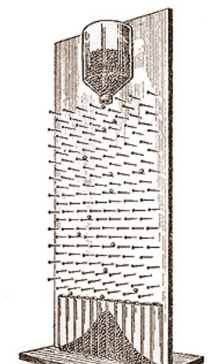
La planche de Galton-Hennequin

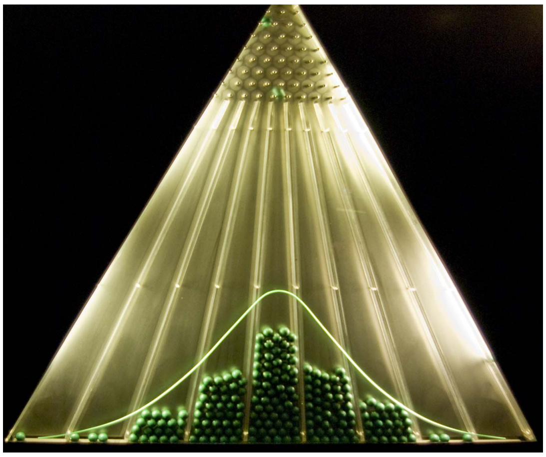
Le but de ce projet est de comprendre ce que fait la planche de Galton et sa variante la planche de Galton-Hennequin. C'est donc un problème de modélisation faisant intervenir l'aléatoire.

1. La planche de Galton

La planche de Galton est une pyramide de clou sur une planche inclinée sur laquelle on fait tomber des billes. En bas se trouve des réservoir permettant de récupérer les billes après leur parcours dans la planche. Elle ressemble à ça :



La réalisation de la planche n'est pas facile mais il se trouve que nous en avons une ! Si vous faites tomber beaucoup de billes, le résultat attendu est le suivant :



C'est précisément ce phénomène que nous allons tenter de comprendre.

2. Les tests

Avant de commencer la modélisation, il faut d'abord voir comment cette planche fonctionne. Nous allons donc faire quelques tests avec la planche que nous avons construite en faisant tomber les billes dans la planche.

3. Modélisation

Pour modéliser la planche, nous devons modeliser le chemin pris par une bille dans la planche. On voit que ce chemin est aléatoire. L'outil mathématique que nous allons introduire est celui des variables aléatoires discrètes, c'est à dire des quantités qui prennent certaines valeurs (en nombre fini) avec une certaine probabilité. Par exemple, quand on lance un dé, le résultat du lancé est une variable aléatoire qui peut prendre les valeurs de 1 à 6 avec une probabilité 1/6 si les dés ne sont pas pipés.

1. Quelle variable aléatoire voulez-vous introduire pour modéliser le chemin d'une bille dans la planche ?
2. Modéliser un chemin dans la planche.
3. Modéliser le résultat du chemin, c'est à dire, en numérotant les réservoirs, dans quel réservoir arrive la bille ?

La modélisation précédente doit vous permettre de déterminer la probabilité pour une bille d'arriver dans un réservoir ou un autre.

1. Combien y-a-t'il de trajectoires possibles ?
2. Calculer le nombre de trajectoires possibles pour arriver dans un réservoir.
3. Exprimer la probabilité d'arriver dans un réservoir.
4. Vérifier que la somme des probabilités fait bien 1, c'est à dire que l'on a un événement certain.

Au passage, vous avez dû voir apparaître des nombres que l'on appelle les nombres binomiaux. Ils ont des propriétés particulières qui se lisent dans un triangle appelé triangle de Pascal et qui est de la forme suivante :

```
                                1
                             1     1
                          1     2     1
                       1     3     3     1
                    1     4     6     4     1
                 1     5    10    10     5     1
              1     6    15    20    15     6     1
           1     7    21    35    35    21     7     1
        1     8    28    56    70    56    28     8     1
     1     9    36    84   126   126    84    36     9     1
  1    10    45   120   210   252   210   120    45    10     1
1   11    55   165   330   462   462   330   165    55    11     1
```

Ce triangle est vraiment étonnant. Par exemple :

1. Faire la division de chaque nombre du triangle par 4 et écrire le reste à la place. Mettre les restes nuls en une couleur différente. Qu'observez-vous ?
2. Faites la même opération avec d'autres valeurs : division par 2, par 3, etc..

Vous avez dû voir apparaître des formes géométriques bizarres. Le groupe travaillant sur les fractals pourra vous donner plus de détails.

Pour relier le triangle de Pascal et notre planche de Galton, vous allez mettre sous chacun des clous de la planche la probabilité d'arrivée.

1. Qu'observez-vous ?
2. Relier le triangle de Pascal et celui que vous venez de faire.

La loi d'arrivée dans un bac s'appelle la loi binomiale de paramètre n où n est le nombre de clous et $1/2$ qui correspond à la probabilité d'aller à droite ou à gauche.