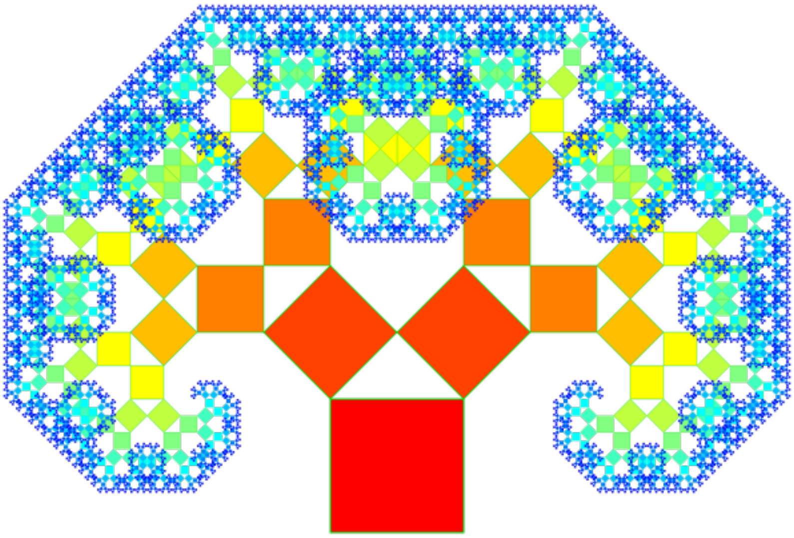
Ensembles fractals, mesure et dimension



Le but de ce projet est d'explorer les objets fractals. On trouves des fractales un peu partout comme par exemple la structure des arbres, celle des poumons ou le chou romanesco. Ils ont des propriétés étonnantes : ils peuvent avoir un volume nul et une surface infinie ou bien un périmètre infini pour une aire finie...On en verra de toutes les sortes. Plutôt que de donner une définition générale, nous allons nous concentrer sur des exemples historiques : flocon de Koch, Tapid de Siepinski, éponge de Menger, pyramide de Sierpinski et un carré fractal....de beaux objets....à construire, regarder et étudier mais surtout une source d'inspiration pour en créer d'autres...les votres.

1. La notion de dimension

Les objets que nous allons étudier n'ont pas une dimension classique mais une dimension appellée dimension de Hausdorff du nom du mathématicien Felix Hausdorff (1868-1942). Pour en avoir une idée, on commence par voir la dimension classique de la manière suivante :

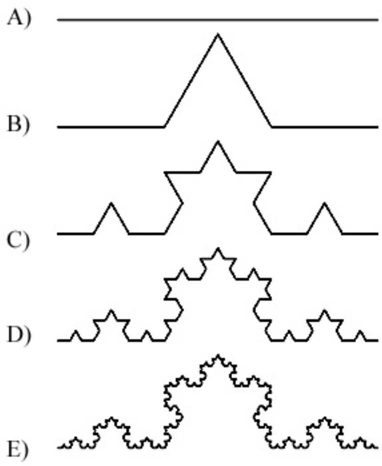
1. Prendre un segment de longueur 1. Faire une homothétie de rapport k. En déduire la longueur du segment final.

2. Même chose avec un carré d'aire 1. Faire une homothétie de rapport k. En déduire l'aire du carré final.
3. Même question pour un cube et son volume.

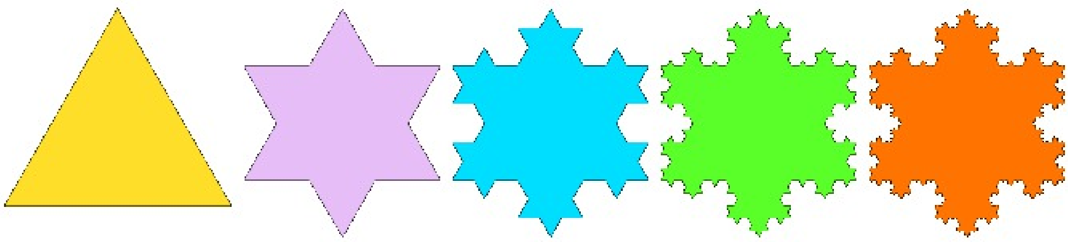
De ces petits calculs, vous devez maintenant savoir où la dimension classique que vous connaissez apparaît. On peut alors généraliser la notion classique, en posant, qu'un objet sera de dimension d si par l'effet d'une homothétie de rapport k on multiplie sa mesure par k^d. Il se trouve qu'avec cette définition, nous allons voir apparaître des objets de dimension non entière !

2. Le flocon de Koch

La courbe de Koch est obtenu de la manière suivante :



En appliquant cette transformation sur un triangle, nous obtenons le magnifique flocon de Koch :



1. Faire une homothétie de rapport 3. Combien de copie du flocon a-t-on ?
2. En déduire la dimension du flocon de Koch.

Quelque chose de bizarre se passe donc avec cette courbe. Calculons sa longueur.

1. Calculer la longueur de la courbe aux étapes 2 et 3.
2. En déduire une formule pour la longueur de la courbe à l'étape n.
3. Démontrer que la courbe de Koch est de longueur infinie !

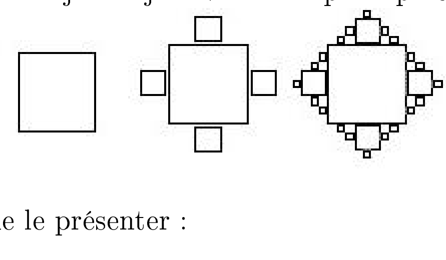
Voila...une courbe que l'on voit et qui est de longueur infinie....ca ne ressemble pas tellement aux courbes que l'on étudie en général. Mais il y a mieux....on peut calculer l'aire des triangles dans lesquels la courbe est contenue.

1. Calculer l'aire du triangle contenant la courbe À l'étape 1 puis la somme des aires des trois triangles contenant l'étape 2.
2. En déduire l'aire des triangles contenant la courbe à l'étape n.
3. Montrer que cette aire tend vers 0 avec n.

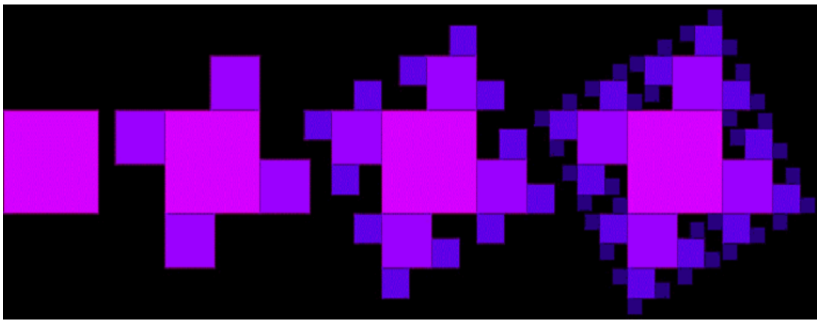
On a donc un objet délimitant une surface d'aire nulle et de longueur infinie. Des exemples plus bizarres encore sont étudiés par le groupe des courbesde Hilbert et Peano. Mais revenon à nos objets fractals et passons à la dimension 2.

3. Un carré fractal

Le carré fractal est un joli objet. Voici son principe de construction :



Une autre façon de le présenter :



Juste en regardant cette figure et avec ce que nous avons fait sur le flocon de Von Koch vous devez avoir une petite idée de ses propriétés....mais allons-y.

3.1. Aire du carré fractal. —

1. Calculer l'aire du carré fractal aux étapes 2 et 3.
2. En déduire une formule à l'étape n.
3. En utilisant les résultats sur les suites géométriques, démontrer que l'aire tend vers 5 si l'aire du carré initial était l'unité.

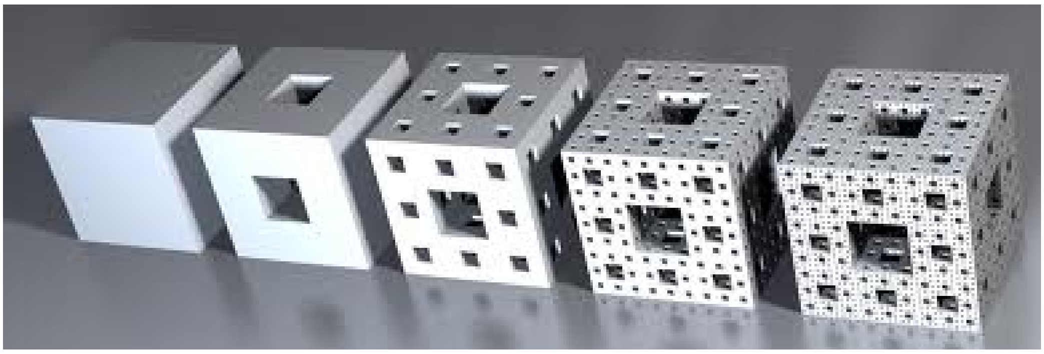
Au passage, on pourrait se demander si il existe une démonstration de ce résultat sous la forme d'une "preuve sans mots" qui est un domaine exploré par un autre groupe....ce serait peut-être bien d'aller les voir pour en discuter.

3.2. Périmètre du carré fractal. — Le calcul du périmètre suit le même principe mais est un peu plus compliqué.

1. Calculer le périmètre du carré fractal aux étapes 2 et 3.
2. En déduire une formule à l'étape n.
3. Démontrer que le périmètre tend vers l'infini avec n.

Voila, nous avons donc une surface finie de périmètre infini.

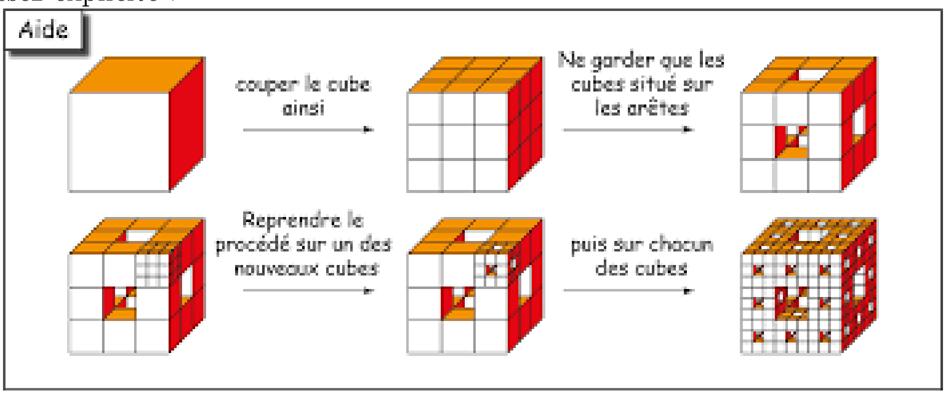
4. L'éponge Menger et la pyramide de Siepinski



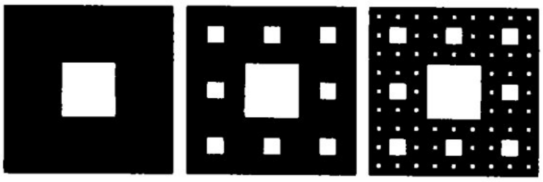
L'éponge de Menger et la pyramide de Sierpinski sont des solides fractals. Ils possèdent plusieurs propriétés remarquables que nous allons étudier. On en construira aussi des répliques.

4.1. Le principe de construction. —

4.1.1. L'éponge Manger. — Plutôt que de longs discours, voici une image assez explicite :

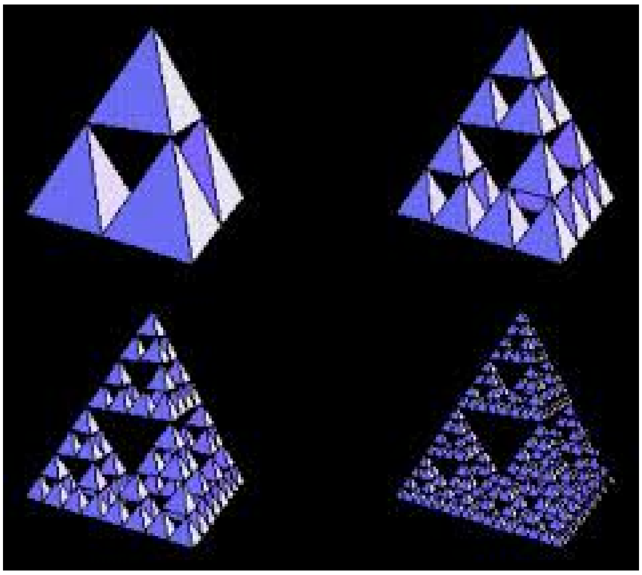


La même construction dans le plan donne le tapis de Sierpinski qui se construit comme cela :

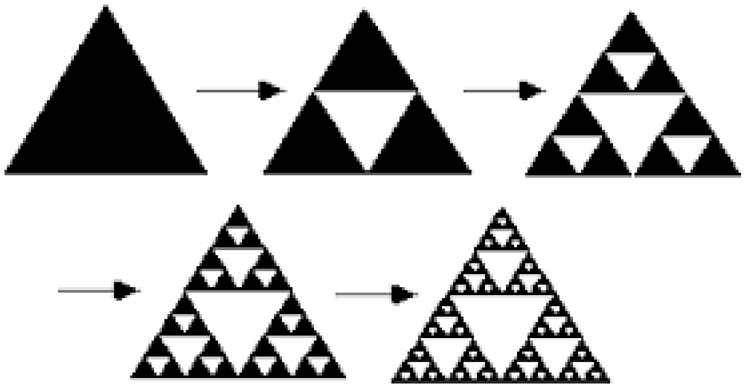


Le problème est d'imaginer l'objet limite.

4.1.2. La pyramide de Sierpinski. — Encore une fois, une bonne image explique pas mal de chose.



On peut d'ailleurs noter que la construction est une généralisation dans l'espace d'une construction dans le plan donnée par



Encore une fois, il faudra imaginer l'ensemble final...

Essentiellement, ce sont le calcul du volume et de l'aire de ces objets qui va nous intéresser. Au passage, on pourra justement réfléchir à la complexité de la construction.

4.2. Calcul du volume de l'éponge de Menger. —

1. Quelle fraction du cube enlève-t-on à la première étape.
2. Faire le calcul pour l'étape 2 et 3.

3. En déduire une formule permettant de passer du volume de l'étape n à celui de l'étape $n + 1$.
4. En déduire l'expression du volume à l'étape n en fonction de n et du volume initial.

Maintenant que nous avons une formule, on peut étudier l'évolution du volume avec n. Après avoir fait quelques expériences numériques, montrer que le volume de l'éponde tend vers 0 avec n !

4.3. Calcul de l'aire de l'éponge de Menger. — Encore une fois, nous allons trouver une formule pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$. Elle est cette fois un peu plus difficile.

1. Calculer le nombre de "carrés" de l'éponge à l'étape 2 et 3.
2. Calculer le nombre de "carrés" de l'éponge à l'étape n. On notera C_n ce nombre.

Vous avez fait le plus difficile ! Il vous reste à calculer l'aire...

1. Calculer l'aire de l'éponge de Menger.

Comme pour le volume, on veut savoir comment cette aire va se comporter lorsque n va vers l'infini.

1. Calculer l'aire de l'éponde aux étapes $2, 3$ et 4.
2. Montrer que l'aire tend vers l'infini avec n.

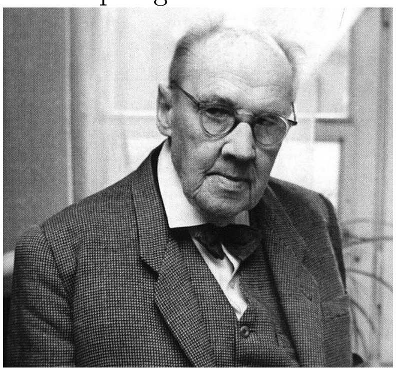
On a donc construit un objet de volume nul et d'aire infini. Ce n'est pas du tout conforme à l'intuition donnée par les solides usuels. Le monde fractal ouvre de nouvelles perspectives et ce sont justement ces perspectives qui sont utilisées dans l'industrie et l'ingénierie.

4.4. La dimension ?— On avait presque oublié. Pouvez-vous calculer la dimension de l'éponge de Menger ?

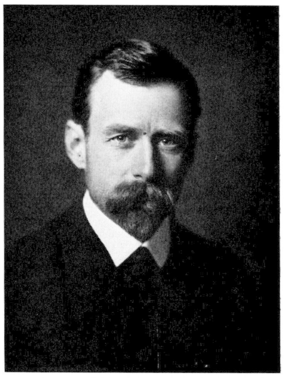
5. Quelques mots sur les mathématiciens qui apparaissent dans ce projet

Toutes les biographies qui suivent proviennent des pages Wikipedia correspondantes.

5.1. Waclaw Franciszek Sierpinski. — Waclaw Franciszek Sierpinski (Varsovie, 14 mars 1882 - Varsovie, 21 octobre 1969) est un mathématicien polonais, connu pour ses contributions à la théorie des ensembles, la théorie des nombres, la théorie des fonctions et la topologie.



5.2. Niels Fabian Helge von Koch. — Niels Fabian Helge von Koch, né le 25 janvier 1870 à Stockholm et mort le 11 mars 1924 à Danderyd, était un mathématicien suédois. On a donné son nom à l'une des premières fractales : le flocon de Koch.



Helge von Koch

Il a également étudié la théorie des nombres, prouvant en 1901 l'équivalence entre l'hypothèse de Riemann et une forme forte du théorème des nombres premiers.

Il a décrit le flocon auquel on a donné son nom en 1904 dans un article intitulé « Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire ».

5.3. Karl Menger. — Karl Menger (Vienne, Autriche, 13 janvier 1902 - Highland Park, Illinois, États-Unis, 5 octobre 1985) est un mathématicien ayant travaillé dans le domaine de la géométrie (courbes, dimension), avec des contributions à la théorie des jeux et aux sciences sociales. On lui doit léponge de Menger, et le théorème de Menger en théorie des graphes.

Il fut lélève de Hans Hahn à luniversité de Vienne, où il soutint sa thèse en 1924.

Membre du Cercle de Vienne et professeur de lUniversité de Vienne de 1926 à 1936, il quitta en 1937 lAutriche pour les États-Unis, où il devint professeur à l'université Notre-Dame, puis à lIllinois Institute of Technology.

Il est le fils de l'économiste Carl Menger.

5.4. Felix Hausdorff. — Felix Hausdorff (8 novembre 1868 - 26 janvier 1942) est un mathématicien allemand, considéré comme l'un des fondateurs de la topologie moderne.

Il contribua aussi significativement à la théorie des ensembles, à la théorie de la mesure et à l'analyse fonctionnelle.

Références

Ce projet est basé sur de nombreuses lectures mais parmi celles-ci, on trouve :

- Jean-Pierre Demailly, Ensembles fractals, mesure et dimension, Conférence au lycée Champollion, Grenoble, 2012.
- Hélène Carlier, Alice Rouvez, Pierre Duflor, Hessan Iranmanesh, Guillaume Rossillon, Voyage vers l'infiniment fractale, Présentation.
- Patrick Schili, L'éponde de Menger, revue APMEP no. 473
- Les pages de Wikipedia concernant la plupart des objets évoqués dans ce projet.