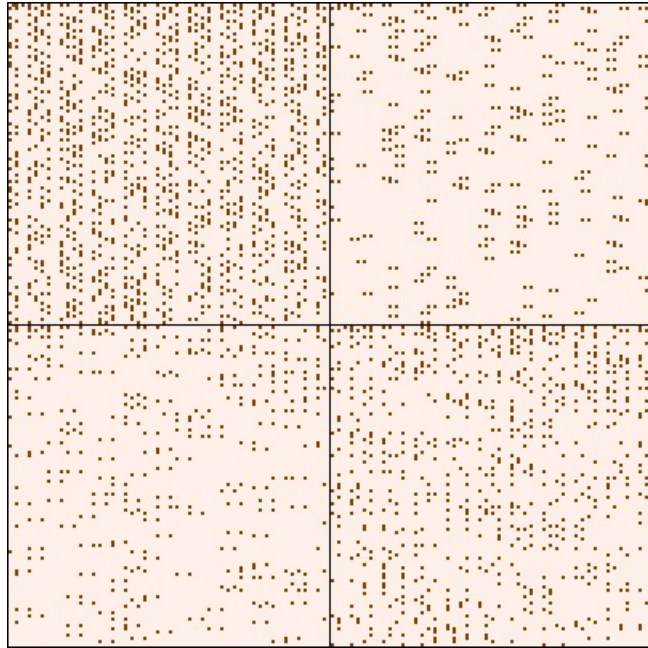


Comment dériver des nombres ?

Partie III - La dérivée arithmétique



Dans cette partie, nous allons définir la *dérivée arithmétique* qui est une notion de dérivée sur les nombres. Pour cela, nous allons utiliser le travail de deux autres groupes :

- celui sur une nouvelle définition de la dérivée
- celui sur les nombres premiers

Le premier nous donnera une piste possible pour définir un analogue de la dérivée sur les nombres via une caractérisation de la dérivée algébrique et non pas dynamique. Le second nous donnera le fameux théorème de décomposition des nombres entiers en produit de facteurs premiers qui sera essentiel dans notre construction et un ensemble de conjectures que nous traduirons avec notre nouvel outil.

1. Définition et propriétés

La définition que nous allons adopter est la suivante :

Définition 1. — Une dérivation arithmétique sur \mathbb{R} est une application $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la relation de Leibniz, c'est à dire pour tous nombres $x, y \in \mathbb{R}$, $D(x, y) = D(x).y + x.D(y)$.

Nous allons faire quelques calculs avec les dérivées arithmétiques qui vont nous servir pour la suite :

1. Calculer $D(1)$, $D(-1)$, $D(0)$.
2. Calculer $D(-n)$, $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer $D(a_1 a_2 a_3)$
4. Calculer $D(a_1 a_2 a_3 a_4)$
5. Donner une expression de $D(a_1 \dots a_n)$.

2. Dérivée arithmétique sur les nombres entiers

Un nombre $n \in \mathbb{N}$ se décompose de manière unique sous la forme

$$(1) \quad n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i},$$

où les p_i sont des nombres premiers et les α_i des entiers.

1. Calculer $D(n)$.
2. En déduire qu'il existe une infinité de dérivée arithmétique.

Vous venez donc de voir qu'il suffit de fixer la valeur de la dérivée sur les nombres premiers pour fixer du même coup la valeur de la dérivée sur les nombres entiers. Il y a donc autant de dérivées que de façons de fixer ces valeurs.

Nous allons à partir de maintenant fixer de manière complètement arbitraire la valeur de la dérivée sur les nombres premiers. Nous posons :

Pour tout nombre premier p , on a $D(p) = 1$.

C'est une façon de mettre sur un même pied d'égalité tous les nombres premiers.

1. Calculer $D(n)$ sous cette hypothèse.
2. Calculer $D(60)$.

3. Dérivée arithmétique sur les rationnels

1. Énoncer un théorème de décomposition pour les nombres rationnels. Quelle est la différence avec les nombres entiers ?
2. Calculer $D(a^q)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $q \in \mathbb{Z}$.
3. En déduire une expression pour tout nombre rationnel $x \in \mathbb{Q}$ de $D(x)$.
4. Calculer $D(1/2)$, $D(1/3)$, $D(3/4)$.
5. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $D(a)$, $D(b)$ leurs dérivées arithmétiques. Donner une expression de $D(a/b)$.

4. La conjecture des nombres jumeaux

La dérivée arithmétique est bien entendue destinée à donner de nouvelles pistes sur de vieux problèmes d'arithmétique. Nous allons en donner une illustration sur la *conjecture des nombres jumeaux*.

Définition 2. — *Soit p un nombre premier. Alors p et $p+2$ sont dits jumeaux si $p+2$ est premier.*

1. Donner plusieurs exemples de nombres jumeaux.

La conjecture est la suivante :

Conjecture 1. — *Il existe une infinité de nombres premiers jumeaux.*

Comme tous les problèmes d'arithmétique, ils sont souvent simples à énoncer. Nous allons aborder cette conjecture à l'aide de la dérivée arithmétique.

1. Soit p un nombre premier. Démontrer que $2p$ est solution de l'équation $D(x) = p + 2$.
2. Dédurre de la conjecture des nombres jumeaux que l'équation $D^2(x) = 1$ admet une infinité de solutions.

5. Dérivée arithmétique sur les irrationnels ?

La construction de la dérivée arithmétique utilise fortement les propriétés des entiers. Nous allons néanmoins étendre cette définition à des sous-ensembles de \mathbb{R} . On commence par introduire l'ensemble suivant :

Définition 3. — On note \mathcal{D} l'ensemble des nombres de la forme $\prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ où les p_i sont des nombres premiers distincts et les $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ pour $i = 1, \dots, k$.

La différence essentielle est donc la présence d'exposants rationnels dans la décomposition en facteur.

1. Démontrer que $\prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i} = 1$ si et seulement si $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$.
 2. En déduire que si un nombre réel $x \in \mathcal{D}$ sa décomposition est unique.
 3. Calculer $D(a^y)$ pour tout $y \in \mathbb{Q}$ et $a \in \mathbb{R}^*$.
 4. En déduire l'expression de la dérivée d'un nombre $x \in \mathcal{D}$.
 5. Calculer $D(\sqrt{3})$.
-