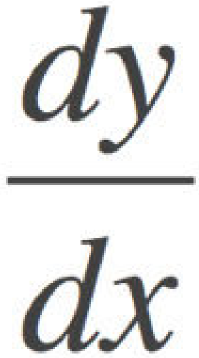
Comment dériver des nombres ?

Partie II - Une nouvelle définition de la dérivée



Leibniz' notation for the *Derivative*, the function that descirbes the rate of change of another functon.

L'objet de ce projet est de trouver une formulation alternative de la notion de dérivée que vous avez apprise et qui permette de "dériver" un nombre réel. Pour cela, nous allons commencer par revenir sur la définition usuelle sur les fonctions et progressivement dégager des propriétés qui nous serviront à construire cette nouvelle définition. Cette démarche est assez représentative de la manière dont on étend une notion mathématique connue à des domaines où elle est absente. On commence par formuler cette notion de plusieurs façons et on regarde ensuite parmi ces formulations celle qui garde un sens dans le domaine que l'on souhaite étudier.

1. La dérivée : quelques propriétés

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on définit, lorsque cette limite existe, la limite

$$f'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \tag{1}$$

appellée *nombre dérivé* de f au point t.

Supposons que ce nombre dérivé existe pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors on peut associer à f une nouvelle fonction, appellée *dérivée de* f notée f' et définie par

$$f' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ t & \longmapsto & f'(t). \end{array} \tag{2}$$

Dans la suite, nous allons noter $E = C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ que l'on peut dériver une infinité de fois. Cet ensemble de fonctions a de bonnes propriétés : toutes les opérations usuelles sur les fonctions redonnent des fonctions du même ensemble.

On note $+$ l'addition des fonctions

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E, \\ (f, g) & \longmapsto & f + g := \{t \in \mathbb{R},\ (f+g)(t) = f(t) + g(t)\}, \end{array} \tag{3}$$

et $\times$ la multiplication des fonctions définie par

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E, \\ (f, g) & \longmapsto & f \times g := \{t \in \mathbb{R},\ (f \times g)(t) = f(t).g(t)\}, \end{array} \tag{4}$$

où . est la multiplication sur $\mathbb{R}$. On notera de la même façon la multiplication des fonctions par les scalaires : pour tout $a \in \mathbb{R}$ et toute fonction $f \in E$ on note $a.f$ la fonction définie par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times E & \longrightarrow & E, \\ (a, f) & \longmapsto & a.f := \{t \in \mathbb{R},\ (a.f)(t) = a.f(t)\}. \end{array} \tag{5}$$

L'ensemble E muni des opérations $+, \times$ et . est ce que l'on appelle une *algèbre* (ici une algèbre de fonctions).

Nous avons donc l'ensemble E sur lequel on a naturellement plusieurs opérations $+, \times$ et . et une action sur E donnée par la dérivation des fonctions. Ce que l'on peut se demander c'est comment cette action se comporte par rapport aux opérations. Vous allez démontrer les résultats suivants en utilisant la définition :

1. Pour toutes fonctions $f, g \in E$, on a $(f + g)' = f' + g'$,
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(a.f)' = a.f'$,
3. (Leibniz) Pour toutes fonctions $f, g \in E$, $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$.

Les deux premières identités traduisent ce que l'on appelle la *linéarité* de la dérivation. La troisième est appellée *relation de Leibniz.*

2. Une définition algébrique

Nous allons montrer un résultat a priori étonnant : *si une action $D : E \to E$ est linéaire et vérifie Leibniz alors cette action est à une fonction multiplicative près la dérivée usuelle, c'est à dire qu'il existe une fonction $h \in E$ telle que pour toute fonction $f \in E$, $D(f) = h \times f'$.*

Nous aurons donc une manière purement algébrique de définir la dérivée d'une fonction sans passer par la notion usuelle de limite et l'interprétation en terme de vitesse.

Commençons donc par une définition calquée sur la dérivée usuelle :

Definition 1. — *Une application $D : E \to E$ s'appelle une dérivation sur E si elle est linéaire et si elle vérifie la relation de Leibniz.*

Démontrons quelques propriétés de cette application.

1. Calculer $D(1)$.
2. En déduire $D(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
3. Comparer le résultat obtenu avec la dérivée usuelle.

Sur les constantes, une dérivation agit donc exactement comme la dérivée usuelle et donne 0. Nous allons étendre ce résultat en considérant des fonctions particulières : les polynômes.

On note $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

1. Calculer $D(x^2)$.
2. Calculer $D(x^3)$.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $D(x^n) = nx^{n-1}D(x)$.

4. En déduire que pour tout polynôme $P(x) = \sum_{n=0}^{d} a_n x^n$, $a_n \in \mathbb{R}$, on a

$$D(P) = D(x)P', \tag{6}$$

où P' représente la dérivée usuelle de P.

Nous venons donc de démontrer qu'une dérivation donne le même résultat que la dérivée usuelle à multiplication près par un polynôme qui est donné par $D(x)$.

Il n'est pas possible de calculer $D(x)$ à partir de la linéarité et de la règle de Leibniz comme pour les constantes. Il faut pour fixer entièrement une dérivation fixer la valeur que l'on assigne à $D(x)$. Par exemple, si l'on décide de poser $D(x) = 1$ alors on a exactement $D(P) = P'$. Quoi qu'il en soit, la dérivée usuelle est une sorte de *brique élémentaire* pour les dérivations sur les fonctions.

3. Une dérivation sur les nombres ?

Notre nouvelle façon de définir la dérivée d'une fonction nous permet de définir naturellement une dérivée sur les nombres. Cette fois, nous allons considérer à la place de E l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de l'addition des nombres réels et de la multiplication.

Definition 2. — *On note $Der(\mathbb{R})$ l'ensemble des dérivations sur l'ensemble $\mathbb{R}$, c'est à dire des applications $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que D soit linéaire et vérifie la relation de Leibniz.*

Nous allons montrer que cet ensemble est malheureusement assez réduit et se réduit à l'application qui à tout nombre réel associe 0. On ne peut pas dire que cette application soit très utile pour comprendre la structure des nombres réels. Il faudra donc modifier notre définition. Nous allons indiquer une piste et c'est celle-là qu'un autre groupe explorera.

1. Démontrer que $D(1) = 0$.
2. Démontrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $D(a) = 0$.

3. Conclure.

On voit que la linéarité couplée à la relation de Leibniz est une condition trop forte pour obtenir un résultat intéressant. On peut donc essayer d'affaiblir une des deux conditions : la linéarité ou la relation de Leibniz.

Nous allons affaiblir la relation de linéarité en ne conservant que l'*additivité*, c'est à dire que pour tout nombre réel $a, b \in \mathbb{R}$, $D(a+b) = D(a) + D(b)$.

Definition 3. — *On appelle dérivation faible sur $\mathbb{R}$ une application $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est additive et vérifie la relation de Leibniz.*

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $D(n) = 0$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $D(-n) = -D(n)$.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $D(1/n) = 0$.
4. En déduire que pour tout rationnel m/n, on a $D(m/n) = 0$.

Une conséquence de ce dernier résultat est que l'application D est linéaire sur les rationnels. Si on impose la continuité de l'application D on obtient alors que D est aussi linéaire sur $\mathbb{R}$ par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est donc que c'est aussi une dérivation. On en déduit alors qu'elle est triviale, c'est à dire réduite à l'application identiquement nulle.

On peut évidemment supposer que l'application D est discontinue en chaque point de $\mathbb{R}$ mais on entre alors dans un domaine vraiment bizarre ou même la construction d'une telle application est compliquée, donc peu utilisable pour notre propos.

La conclusion essentielle de notre travail est néanmoins la suivante : *Si l'on veut construire une dérivation sur les nombres réels, il faut renoncer à la propriété de linéarité ou même d'additivité.*

Un autre groupe va donc explorer la construction d'une "dérivation" sur les nombres qui sera une application vérifiant seulement la relation de Leibniz.