C. R. Acad. Sci. Paris, t. 327, Série I, p. 581-584, 1998
Systèmes dynamiques/*Dynamical Systems*

Formes normales et problème du centre symétrique

Jacky CRESSON [a], Bertrand SCHUMAN [b]

[a] Équipe de mathématiques de Besançon, CNRS-UMR 6623, Université de Franche-Comté, 16, route de Gray, 25030 Besançon cedex, France
Courriel : cresson@math.univ-fcomte.fr

[b] Institut de mathématiques de Jussieu, CNRS-UMR 7586, Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris VI, tour 46-00, 5ème étage, case 247, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France
Courriel : schuman@math.jussieu.fr

(Reçu le 22 juin 1998, accepté après révision le 11 septembre 1998)

Résumé. Soit $X = (x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}) + f(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ un champ de vecteurs polynomial de degré n du plan $\mathbb{R}^2$. Étant donné une forme normale, on obtient une décomposition universelle des monômes résonants. On résout alors le problème du centre symétrique. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Normal forms and symmetric centers

Abstract. *Let $X = (x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}) + f(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ be a polynomial vector field of degree n of the plane $\mathbb{R}^2$. Given a normal form, we obtain an universal decomposition of each resonant monomial. We then solve the problem of the symmetric center.* © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

1. Introduction

Soit $X = \left(x\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial x}\right) + f(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x} + g(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}$ un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$, où $f(x,y)$ et $g(x,y)$ sont deux polynômes réels de degré n :

$$f(x,y) = \sum_{2\leq\alpha+\beta\leq n} f_{\alpha,\beta}x^\alpha y^\beta \quad \text{et} \quad g(x,y) = \sum_{2\leq\alpha+\beta\leq n} g_{\alpha,\beta}x^\alpha y^\beta.$$

Le problème du centre consiste à trouver les conditions nécessaires et suffisantes sur les coefficients de f et g pour lesquelles le champ de vecteurs polynomial a toutes ses orbites périodiques dans un voisinage de l'origine.

On commence par étudier la structure des monômes résonants associés à une forme normale. En utilisant une caractérisation géométrique (l'invariance sous l'action de $\mathbb{S}^1$), on donne une décomposition universelle de ces monômes, dans le sens où ceux-ci sont indépendants de la forme normale considérée.

Note présentée par Charles-Michel MARLE.

Cette caractérisation est, en terme combinatoire, un réseau. L'expression de la base ainsi que celle des monômes universels sont explicites.

Ceci nous permet de donner une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un centre symétrique. Ce premier résultat généralise à une perturbation quelconque les résultats de H. Dulac [1] et K.S. Sibirsky [2] sur le problème du centre symétrique.

2. Notations et résultat principal

On note $(z = x + iy, \bar{z} = x + iy)$ un système de coordonnées complexes ; le champ X s'écrit alors $X = i\left(z\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) + P(z,\bar{z})\frac{\partial}{\partial z} + \overline{P}(z,\bar{z})\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, où $P(z,\bar{z}) = \sum_{2\leq\alpha+\beta\leq n} a_{\alpha,\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta$ est un polynôme de degré n en $(z,\bar{z})$ et à coefficients complexes $a_{\alpha,\beta} \in \mathbb{C}$, et $\overline{P}(z,\bar{z})$ le conjugué complexe de $P(z,\bar{z})$.

a) *Formes normale.* – Il existe un système de coordonnées analytique dans lequel le champ de vecteurs se met sous la forme normale suivante :

$$X = i\left(z\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) + \mathrm{Re}(S(z\bar{z}))\left(z\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) + i\,\mathrm{Im}(S(z\bar{z}))\left(z\frac{\partial}{\partial z} + \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right),$$

où la série $S(z\bar{z})$ s'écrit $S(z\bar{z}) = \sum_{k\geq 1} S_k (z\bar{z})^k$ avec S_k un polynôme en les coefficients $a_{\alpha,\beta}$ du polynôme $P(z,\bar{z})$ (*voir* [3]). On note $S_k = S_k(a_{\alpha,\beta})$. Le polynôme S_k est invariant sous l'action de $\mathbb{S}^1$, i.e. pour tout $\xi \in \mathbb{S}^1$, on a :

$$(\mathrm{S}^1) \qquad S_k(\xi^{\alpha-\beta-1} a_{\alpha,\beta}, \bar{\xi}^{\alpha-\beta-1} \bar{a}_{\alpha,\beta}) = S_k(a_{\alpha,\beta}, \bar{a}_{\alpha,\beta}).$$

Les polynômes S_k sont dit *résonants*, et les monômes les constituant sont appelés *monômes résonants*.

b) *Coefficients et poids.* – Pour chaque coefficient $a_{\alpha,\beta}$ de P on définit un poids $p_{\alpha,\beta} \in \mathbb{Z}$ par $p_{\alpha,\beta} = \alpha - \beta - 1$. On note $p = (p_{\alpha,\beta})$ l'ensemble des poids et $N \in \mathbb{N}$ le nombre de coefficients $a_{\alpha,\beta}$.

On regarde maintenant les coefficients composantes homogènes par composantes homogènes, i.e. l'ensemble $a(d)$ des $a_{\alpha,\beta}$ avec $\alpha + \beta = d$, $d = 1, \ldots, n$. On note $a^+(d)$ (resp. $a^-(d)$) l'ensemble des coefficients de $a(d)$ à poids positif (resp. négatif) et $n^+(d)$ (resp. $n^-(d)$) le cardinal de cet ensemble. On note de même, $a^0(d)$ l'ensemble des coefficients de $a(d)$ à poids nuls et $n^0(d)$ son cardinal.

On a $a^+(2m) = (a_{m+1,m-1}, \ldots, a_{i,2m-i}, \ldots, a_{2m,0})$, $n^+(2m) = m$ et $a^-(2m) = (a_{0,2m}, \ldots, a_{i,2m-i}, \ldots, a_{m,m})$, $n^-(2m) = m+1$ et $a^0(2m) = \emptyset$, $n^0(2m) = 0$. De même, on a $a^+(2m+1) = (a_{m+2,m-1}, \ldots, a_{i,2m+1-i}, \ldots, a_{2m+1,0})$, $n^+(2m+1) = m$ et $a^-(2m+1) = (a_{0,2m+1}, \ldots, a_{i,2m-i}, \ldots, a_{m,m})$, $n^-(2m+1) = m+1$ et $a^0(2m+1) = a_{m+1,m}$, $n^0(2m+1) = 1$.

On note a le vecteur de $\mathbb{C}^N$ définit par $a = (a^+(2), \ldots, a^+(n), a^-(2), \ldots, a^-(n))$, avec $N = N^+ + N^-$, où $N^+ = m^2$ (resp. $N^+ = m^2 + m$) et $N^- = m^2 + 2m - 1$ (resp. $N^- = m^2 + 3m$) si $n = 2m$ (resp. $n = 2m+1$). De même, on note $a_0 = (a_0(2), \ldots, a_0(n))$, avec $N^0 = m - 1$ (resp. $N^0 = m$) si $n = 2m$ (resp. $n = 2m+1$). Soit p le vecteur de $\mathbb{Z}^N$ défini par les poids correspondant aux coefficients de a, noté $p = (p_1^+, \ldots, p_{N^+}^+; -p_1^-, \ldots, -p_{N^-}^-)$. Soit $\sigma = N^- - N^+$ la signature de l'ensemble. On a toujours $\sigma > 0$.

Pour tout $a \in \mathbb{C}^N$ et $l \in \mathbb{Z}^N$, on note $a^l = a_1^{l_1} \cdots a_N^{l_N}$ et $|a|^l = |a_1|^{l_1} \cdots |a_N|^{l_N}$.

c) *Monômes universels et théorème de décomposition.* – Un monôme de degré $d \in \mathbb{N}$ de S_k est de la forme $a^l \bar{a}^{\bar{l}}$, avec $l = (l_1, \ldots, l_N)$, $\bar{l} = (\bar{l}_1, \ldots, \bar{l}_N)$, où $l \in \mathbb{N}^N$, $\bar{l} \in \mathbb{N}^N$, tels que $\sum_{i=1}^{N} (l_i + \bar{l}_i) = d$.

DÉFINITION (monômes universels). – On appelle *monômes universels* les monômes suivants : $U_i = (a_i^+)^{p_i^-}(a_i^-)^{p_i^+}$, $U_{N^-+i} = (a_i^-)^{p_{N^-+1}^-}(a_{N^-+1}^+)^{p_i^-}$, $U_{2N^-+j} = (a_j^-)^{p_{N^-+j}^+}\left(a_{N^-+j}^+\right)^{p_j^-}$, $i = 1,\dots,N^-$, $j = 1,\dots,\sigma$.

Ces monômes sont obtenus en écrivant explicitement l'invariance sous l'action de $\mathbb{S}^1$. Celle-ci définit un $\mathbb{Z}$-module, uniquement déterminé par une relation sur les poids des coefficients. Le choix d'une base canonique de ce réseau donne les monômes universels, constituants élémentaires des monômes résonants. En effet, on a :

THÉORÈME (de décomposition). – *Tous les monômes résonants s'écrivent sous la forme suivante :*

$$(a_0)^l(\bar{a}_0)^{\bar{l}}\left(\prod_{i=1}^{2n-1} U_i^{k_i}\right)|a|^m,$$

avec $m \in \mathbb{Z}^N$ tel que $m_i - p_i^- k_i \in \mathbb{N}$, $m_{N^++i} - p_i^+ k_i - p_{N^-+1}^+ k_{i+N^-} - p_{N^-+i}^+ k_{2N^-+i} \in \mathbb{N}$ pour $i = 1,\dots,N^-$, ainsi que $m_{N^-+1} - \sum_{i=1}^{N^-} k_i p_i^- \in \mathbb{N}$, et $m_{N^-+j} - k_{2N^-+j}p_j^- \in \mathbb{N}$ pour $j = 1,\dots,\sigma$.

On retrouve ici, par une approche élémentaire, une idée de J. Écalle [4], qui extrait des problèmes de linéarisation des éléments universels qui se traduisent, entre autres, par le calcul moulien.

3. Plan de la démonstration

La démonstration s'effectue en deux étapes. La première traduit le problème de la décomposition des monômes résonants en la recherche d'une base d'un $\mathbb{Z}$-module. La seconde étape consiste à transcrire l'information sur les poids en termes des coefficients.

Réseau. – On écrit l'action de $\mathbb{S}^1$ sur un monôme résonant de la forme $a^l\bar{a}^{\bar{l}}$, où $l \in \mathbb{N}^N$, $\bar{l} \in \mathbb{N}^N$. On a alors $l \cdot p - \bar{l} \cdot p = 0$, où p est le vecteur poids. Afin de simplifier notre approche, nous préférons travailler sur un réseau plutôt qu'un semi-groupe. On a donc la relation de résonance suivante pour $k = l - \bar{l} \in \mathbb{Z}^N$,

$$k \cdot p = 0. \tag{R}$$

LEMME (base du réseau). – *Une base du $\mathbb{Z}$-module $k \cdot p = 0$, où $k \in \mathbb{Z}^N$, est donnée par les $N-1$ vecteurs suivants :*

$$\begin{aligned} e_i &= (0,\dots,p_i^-,\dots,0;0,\dots,p_i^+,\dots,0;0,\dots,0), \qquad i = 1,\dots,N^-,\\ e_{i+N^-} &= (0,\dots,0;0,\dots,p_{N^-+1}^+,\dots,0;0,\dots,p_i^-,\dots,0),\ i = 1,\dots,N^-,\\ e_{2N^-+i-1} &= (0,\dots,0;0,\dots,p_{N^-+i}^+,\dots,0;0,\dots,p_i^-,\dots,0),\ i = 2,\dots,\sigma. \end{aligned}$$

Le choix de cette base est minimale dans le sens où les vecteurs la constituant ne possèdent que deux composantes non nulles.

Transcription en terme de monômes résonants. – Le lemme algébrique précédent, nous permet de décomposer tout élément $k \in \mathbb{Z}^N$ sous la forme $k = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i e_i$, soit les relations suivantes sur les k_i : $k_i = \alpha_i p_i^-$, $k_{N^-+1} = \alpha_1 p_1^+ + \sum_{i=1}^{N^-} \alpha_{N^-+i} p_{N^-+1}^+$, et $k_{N^-+i} = \alpha_i p_i^+ + \alpha_{2N^-+i-1} p_{N^-+i}^+$ pour

$i = 2, \ldots, N^-$, et $k_{2N^-+j} = 2\alpha_{N^-+j} p_j^-$ pour $j = 2, \ldots \sigma$. Comme $k = l - \bar{l}$, on a donc $l = k + \bar{l}$ et les monômes résonants s'écrivent $a^l \bar{a}^{\bar{l}} = a^k |a|^{2\bar{l}}$. En remplacant k par son expression et en regroupant les termes ayant le même α_i, nous obtenons la décomposition donnée dans le théorème. □

Remarque. – Les monômes universels ont un caractère a priori non homogène. Leur caractérisation est en fait linéaire, grâce à la pondération de l'espace des coefficients, et l'aspect projectif provenant de l'invariance sous l'action de $\mathbb{S}^1$.

Le classement des coefficients, ainsi que le choix de la base, est l'analogue des choix canoniques effectués par J. Écalle [4] dans l'écriture des formes prénormales.

4. Conséquences sur le problème du centre

Le problème du centre consiste à annuler la partie dissipative du champ de vecteurs (foyer). On doit donc trouver les conditions sur les coefficients de P afin d'annuler $\mathrm{Im}(S_k)$ pour tout $k \geq 2$. Le théorème de décomposition donne alors immédiatement :

THÉORÈME (centre symétrique). – *Une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un centre symétrique est :*

$$\text{(CS)} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{Im}(a_i^0) = 0, \ i = 1, \ldots, N^0, \\ &\mathrm{Im}(U_i) = 0, \ i = 1, \ldots, N - 1. \end{aligned}$$

Il suffit d'écrire la symétrie du champ par rapport à une droite arg(z) $= \theta$, $\theta \in [0, 2\pi[$. Celle-ci se traduit par les relations suivantes sur les coefficients :

$$a_{\alpha,\beta} = \bar{a}_{\alpha,\beta} \mathrm{e}^{-2i\theta p_{\alpha,\beta}}. \qquad \text{(SYM)}$$

On voit sans peine que la condition (SYM) implique la condition (CS). Réciproquement, la condition (CS) implique la condition (SYM) avec un angle $\theta \in [0, 2\pi[$, défini par

$$\mathrm{e}^{2i\theta p_{N^-+1}} = \bar{a}^+_{N^-+1} (a^+_{N^-+1})^{-1}.$$

On retrouve notamment, pour le cas $n = 2$, les conditions de H. Dulac [1], et pour $n = 3$ homogène, celles de K.S. Sibirsky [2].

Références bibliographiques

[1] Dulac H., Détermination et intégration d'une certaine classe d'équations différentielles ayant pour points singuliers un centre, Bull. Sci. Math. 32 (1908) 230–252.

[2] Sibirsky K.S., Introduction to the algebraic theory of invariants of differential equations, Nonlinear Sciences, Theory and applications, Manchester Univ. Press, 1988.

[3] Françoise J.-P., Birkhoff normal forms and analytic geometry, in: Symplectic singularities and geometry of gauge fields, Banach Center Publications 39, Institute of Math., Polish Acad. of Sc., Warszawa, 1997, pp. 49–56.

[4] Écalle J., Compensation of small denominators and ramified linearization of local objects, Soc. Math. France, Astérisque 222 (1994) 135–199.