C. R. Acad. Sci. Paris, t. 331, Série I, p. 65–70, 2000
Systèmes dynamiques/*Dynamical Systems*

Un λ-lemme pour des tores partiellement hyperboliques

Jacky CRESSON

Équipe de mathématiques de Besançon, CNRS-UMR 6623, 16, route de Gray, 25030 Besançon cedex, France
Courriel : cresson@math.univ-fcomte.fr

(Reçu le 13 mars 2000, accepté le 27 avril 2000)

Résumé. On démontre un λ-lemme pour des tores partiellement hyperboliques dont le flot est avec torsion. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

A λ-lemma for partially hyperbolic tori

Abstract. *We prove a λ-lemma for partially hyperbolic tori whose dynamics is with torsion.* © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

In 1969, J. Palis ([8], p. 82) has proved a λ-lemma (also called *inclination* lemma) for hyperbolic fixed point of C^2 diffeomorphism. Let p be a hyperbolic fixed point. We denote by $W^+(p)$ (resp. $W^-(p)$) its stable (resp. unstable manifold):

λ-LEMMA. – *Let $\varepsilon > 0$ be given. Let Δ be a manifold which intersects $W^+(p)$ transversally, then there exists n_0 such that for $n \geqslant n_0$, $f^n(\Delta)$ is ε-close to $W^-(p)$ in the C^1 topology.*

This result allowed him to prove many properties of Morse–Smale dynamical systems [8]. It can also be used to prove the Birkhoff–Smale theorem.

The λ-lemma has been extended to normally hyperbolic tori by Wiggins (*see* [9], and [2] for a correct statement and proof). The only difference with respect to Palis result is that one must take into account the “tangential” dynamics. But, by normal hyperbolicity this dynamics is dominated by the hyperbolic dynamics. So, the flow on the torus has no consequence on the result.

Recently, weak form of the λ-lemma appeared for partially hyperbolic tori [1,7]. They are used to study Arnol’d diffusion via Arnol’d’s mechanism of transition chain, in particular the *obstruction property* for partially hyperbolic tori.

In this Note, we prove a λ-lemma for partially hyperbolic tori. The proof uses the dynamics on the torus. Precisely, the λ-lemma is false if the dynamics on the torus is without torsion. This constraint comes from the straightening of neutral directions.

Note présentée par Jean-Christophe YOCCOZ.

S0764-4442(00)00507-3/FLA

We consider C^2 diffeomorphism of the form:

$$f(\theta, I, s, u) = (\theta + \omega + \nu I, I, \lambda s, \lambda^{-1} u) + r(\theta, I, s, u),$$

where $(\theta, I, s, u) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ with $r(\theta, I, s, u) = O_2(I, su)$ and $\nu \neq 0$.

This diffeomorphism possesses an invariant partially hyperbolic torus given by $T = \{I = s = u = 0\}$ with stable and unstable manifolds given by $W^+(T) = \{I = u = 0\}$ and $W^-(T) = \{I = s = 0\}$ respectively.

We then have:

λ-LEMMA. – *Let Δ and $W^+(T)$ intersect transversally, then $f^n(\Delta)$ converges toward $W^-(T)$ when $n \to \infty$ in C^1 compact open topology.*

The main difference with respect to Palis or Wiggins result is that, due to the partial hyperbolicity of the torus, one must take into account the *neutral* dynamics (in I). In particular, we explicit a *parabolic* effect due to the torsion of the flow on the torus which, together with the classical hyperbolic effect, allows us to prove the lemma.

Finally, we prove a *transitivity* property for intersection of the stable and unstable manifolds along a chain of partially hyperbolic tori, solving a question of Holmes and Marsden [5].

1. Introduction

En 1969, J. Palis ([8], p. 82) énonce un λ-lemme pour un point fixe hyperbolique : soit f un difféomorphisme de classe C^2, possédant un point fixe hyperbolique p. On note $W^+(p)$ (resp. $W^-(p)$) sa variété stable (resp. instable). Si Δ coupe $W^+(p)$ transversalement, alors $f^n(\Delta)$ converge vers $W^-(p)$ dans la topologie C^1 compacte ouverte.

Ce résultat permet de démontrer de nombreuses propriétés dynamiques des systèmes de Morse–Smale [8]. Il permet aussi une démonstration du théorème de Birkhoff–Smale [9].

Le λ-lemme a depuis été étendu aux tores normalement hyperboliques (*voir* [9] et [2] pour une version corrigée). La nouveauté proviens de la prise en compte des directions tangentes au tore. La démonstration ne fait pas intervenir la dynamique sur le tore.

Récemment, des formes faibles du λ-lemme ont vu le jour pour des tores partiellement hyperboliques [1,7]. Ces objets interviennent dans le problème de l'instabilité des systèmes hamiltoniens [2].

Dans cette Note, nous démontrons un analogue du λ-lemme pour des tores partiellement hyperboliques. La démonstration fait intervenir la dynamique sur le tore. Notamment, le λ-lemme est vrai si et seulement si la dynamique sur le tore est à torsion non nulle. Cette contrainte proviens de la condition de redressement dans les directions neutres au tore.

2. Le λ-lemme pour les tores standard

On renvoie à ([6], p. 28) pour la définition des tores partiellement hyperboliques.

DÉFINITION 1. – Soit f un difféomorphisme de classe C^2 possédant un tore partiellement hyperbolique T. Le tore T est dit *standard*, si il existe un système de coordonnées dans lequel f prend la forme :

$$f(\theta, I, s, u) = (\theta + \omega + \nu I, I, \lambda s, \lambda^{-1} u) + r(\theta, I, s, u),$$

où $(\theta, I, s, u) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ avec $r(\theta, I, s, u) = O_2(I, su)$ et $\nu \neq 0$.

Le tore T est donné par $T = \{(\theta, I, s, u) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid I = s = u = 0\}$ et sa variété stable (resp. instable) par $W^+(T) = \{(\theta, I, s, u) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid I = u = 0\}$ (resp. $W^-(T) = \{(\theta, I, s, u) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid I = s = 0\}$).

Le tore T est de dimension n et sa variété stable (resp. instable) de dimension $n+1$. On démontre le :

λ-LEMME. – *Soit Δ une variété transverse à $W^+(T)$ de même dimension que $W^+(T)$, alors les itérés $f^n(\Delta)$, tendent lorsque $n \to \infty$, vers la variété instable $W^-(T)$, dans la topologie C^1 compacte ouverte.*

Démonstration. – Soit $v = (v^\theta, v^I, v^s, v^u)$ un vecteur. On note $D_-(v)$ et $D_t(v)$ les quantités

$$D_-(v) = \frac{\sup(|v^\theta|, |v^I|, |v^s|)}{|v^u|}, \qquad D_t(v) = \frac{\sup(|v^I|, |v^s|)}{|v^\theta|}.$$

Soit $v = (v^\theta, v^I, v^s, v^u)$ un vecteur tangent à Δ en p. On note $v_{n+1} = (v^\theta_{n+1}, v^I_{n+1}, v^s_{n+1}, v^u_{n+1})$ le vecteur $v_{n+1} = Df_{f^{n+1}(p)}(v_n)$ avec la convention $v_0 = v$.

La convergence de $f^n(\Delta)$ vers $W^-(T)$ se traduit par :

$$\lim_{n\to\infty} D_-(v_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} D_t(v_n) = 0. \tag{1}$$

.

Un vecteur vérifiant (1) sera dit redressé.

On commence par regarder le comportement des vecteurs tangents à Δ sous itération le long de $W^+(T)$. Soit $p^+ = (\theta^+, 0, s^+, 0) \in W^+(T) \cap \Delta$ et $v = (v^\theta, v^I, v^s, v^u) \in T_{p^+}\Delta$. La matrice jacobienne de f en p^+ est

$$D_{p^+}f = \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

On note $v_1 = Df_{p^+}v$ et $v_{n+1} = Df_{f^n(p^+)}(v_n)$. On a :

$$v^\theta_{n+1} = v^\theta_n + \nu v^I_n, \quad v^I_{n+1} = v^I_n, \quad v^s_{n+1} = \lambda v^s_n, \quad v^u_{n+1} = \lambda^{-1} v^u_n.$$

On en déduit

$$\frac{|v^\theta_{n+1}|}{|v^u_{n+1}|} \leqslant \lambda \frac{|v^\theta_n|}{|v^u_n|} + |\nu|\lambda \frac{|v^I_n|}{|v^u_n|}, \quad \frac{|v^s_{n+1}|}{|v^u_{n+1}|} = \lambda^2 \frac{|v^s_n|}{|v^u_n|}, \quad \frac{|v^I_{n+1}|}{|v^u_{n+1}|} = \lambda \frac{|v^I_n|}{|v^u_n|}.$$

On en déduit facilement que

$$\frac{|v^s_n|}{|v^u_n|} \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{|v^I_n|}{|v^u_n|} \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty,$$

d'où $|v^\theta_n|/|v^u_n| \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Dans les directions tangentes au tore, on a pour n assez grand, $|v^\theta_n| \geqslant n|\nu|\,|v^I| - |v^\theta|$; d'où

$$\frac{|v^s_n|}{|v^\theta_n|} \leqslant \lambda^n \frac{|v^s|}{|v^\theta|}\left(n|\nu|\frac{|v^I|}{|v^\theta|} - 1\right)^{-1}, \qquad \frac{|v^I_n|}{|v^\theta_n|} \leqslant \frac{|v^I|}{|v^\theta|}\left(n|\nu|\frac{|v^I|}{|v^\theta|} - 1\right)^{-1}.$$

Lorsque $n \to \infty$, on a

$$\left(n|\nu|\frac{|v^I|}{|v^\theta|} - 1\right)^{-1} \to 0.$$

On en déduit $D_t(v_n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Remarque 1. – Le résultat est faux si la torsion s'annule (par exemple, les systèmes hamiltoniens isochrones $H(\theta, I, s, u) = \omega I + \lambda s u$ où $(I, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ et $(s, u) \in \mathbb{R}^2$, étudiés par Gallavotti [4]).

Les vecteurs tangents à Δ se redressent donc le long de $W^+(T)$.

On étend le résultat de redressement à un voisinage de p^+. Soit $\varepsilon > 0$. Pour n suffisamment grand, on a pour tout $v \in T_{f^n(p^+)}\Delta$,

$$D_-(v) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}, \qquad D_t(v) \leqslant \frac{\varepsilon}{4},$$

lorsque $D_-(v)$ (resp. $D_t(v)$) est défini.

Par continuité du plan tangent de $\Delta_n = f^n(\Delta)$, il existe une sous variété $\widetilde{\Delta}_n$, plongée dans Δ_n telle que pour tout vecteur $v \in T_p\widetilde{\Delta}_n$, $p \in \widetilde{\Delta}_n$, on a

$$D_-(v) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \qquad D_t(v) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $v = (v^\theta, v^I, v^s, v^u) \in T_p\widetilde{\Delta}_n$, $p \in \widetilde{\Delta}_n$. La matrice jacobienne de f en p est de la forme :

$$D_p f = \begin{pmatrix} I + \partial_\theta r_\theta & \nu + \partial_I r_\theta & \partial_s r_\theta & \partial_u r_\theta \\ \partial_\theta r_I & I + \partial_I r_I & \partial_s r_I & \partial_u r_I \\ \partial_\theta r_s & \partial_I r_s & \lambda + \partial_s r_s & \partial_u r_s \\ \partial_\theta r_u & \partial_I r_u & \partial_s r_u & \lambda^{-1} + \partial_u r_u \end{pmatrix}.$$

Soit $V_\mu = \{p;\ (p, W^-(T)) < \mu\}$ un voisinage de $W^-(T)$. Comme $\partial_x r_y(p) = 0$ pour tout $p \in W^-(T)$, on peut choisir μ suffisamment petit tel que, pour tout $p \in V_\mu$,

$$\left|\partial_x r_y(p)\right| < M,$$

avec

$$M < \frac{\lambda^{-1} - 1}{5}.$$

On a donc

$$\left|v_{n+1}^u\right| = \left|\partial_\theta r_u v_n^\theta + \partial_I r_u v_n^I + \partial_s r_u v_n^s + \lambda^{-1} v_n^u + \partial_u r_u v_n^u\right| \geqslant \left|v_n^u\right|\left(\lambda^{-1} - 4M\right).$$

On en déduit facilement l'inégalité :

$$D_-(v_{n+1}) \leqslant \frac{1+M}{\lambda^{-1} - 4M}\, D_-(v_n) + M.$$

On note $\delta = (1+M)/(\lambda^{-1} - 4M) < 1$. Par récurrence, on a

$$D_-(v_{n+1}) \leqslant \delta^{n+1} D_-(v) + \frac{M}{1-\delta}.$$

On peut choisir μ suffisamment petit pour avoir

$$\frac{M}{1-\delta} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $D_-(v) < \varepsilon/2$ pour tout $v \in T_p\widetilde{\Delta}_n$, $p \in \widetilde{\Delta}_n$, on a

$$D_-(v_{n+1}) < \varepsilon.$$

On note $f^n(\theta, I, s, u) = (\theta + n\omega + nI\nu, I, \lambda^n s, \lambda^{-n} u) + (r_n^\theta, r_n^I, r_n^s, r_n^u)$. On en déduit

$$v_n^I = v^I + \partial r_n^I \cdot v, \qquad v_n^\theta = v^\theta + nv^I + \partial r_n^\theta \cdot v,$$

où $\partial r_n^x = (\partial_\theta r_n^x, \partial_I r_n^x, \partial_s r_n^x, \partial_u r_n^x)$, $x \in \{\theta, I, s, u\}$.

La forme du reste étant en $O_2(I, su)$, on montre facilement que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, z \in V_\mu, \quad \left|\partial_y r_n^x(z)\right| = O\big(\mu^2\big), \quad x, y \in \{\theta, I, s, u\}.$$

On en déduit les inégalités suivantes :

$$\left|v_n^I\right| \leqslant \left|v^I\right| + \mu^2 |v|, \qquad \left|v_n^\theta\right| \geqslant n\left|v^I\right| - \left|v^\theta\right| - \mu^2 |v|,$$

pour n assez grand, avec $|v| = |v^\theta| + |v^I| + |v^s| + |v^u|$.

On a donc, pour n assez grand

$$\frac{|v_n^I|}{|v_n^\theta|} \leqslant \frac{|v^I|}{|v^\theta|} \, \frac{1 + \mu^2 \frac{|v|}{|v^I|}}{n \frac{|v^I|}{|v^\theta|} - 1 - \mu^2 \frac{|v|}{|v^\theta|}}.$$

Comme

$$\frac{1 + \mu^2 \frac{|v|}{|v^I|}}{n \frac{|v^I|}{|v^\theta|} - 1 - \mu^2 \frac{|v|}{|v^\theta|}} < 1,$$

pour n assez grand, on en déduit

$$\frac{|v_n^I|}{|v_n^\theta|} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

On démontre de même,

$$\frac{|v_n^s|}{|v_n^\theta|} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Pour tout $v \in T_p\widetilde{\Delta}_n$, $p \in \widetilde{\Delta}_n$, ces deux inégalités impliquent donc $D_t(v_n) \leqslant \varepsilon$ pour n assez grand.

Ceci termine la démonstration du λ-lemme. $\square$

3. Conséquence sur le mécanisme d'Arnol'd

Dans [5], Holmes et Marsden conjecturent, par référence au cas hyperbolique (*voir* [8], corollaire 1, p. 85), une propriété de *transitivité* des intersections transverses le long d'une chaîne de transition.

Dans le cas des tores standard, le λ-lemme permet de démontrer :

PROPOSITION 1. – *Soit T_i, $i = 1, \ldots, N$, une famille de tores standard, tels que $W^-(T_i)$ et $W^+(T_{i+1})$ se coupent transversalement, alors $W^-(T_1)$ et $W^+(T_N)$ se coupent transvesalement.*

La forme faible du λ-lemme démontrée dans [7,1] ne permet pas d'obtenir ce résultat. L'existence d'orbites de dérive le long d'une telle chaîne découle facilement de la proposition.

Références bibliographiques

[1] Cresson J., A λ-lemma for partially hyperbolic tori and the obstruction property, Lett. in Math. Phys. 42 (1997) 363–377.
[2] Cresson J., Propriétés d'instabilité des systèmes hamiltoniens proches de systèmes intégrables, Thèse, Observatoire de Paris, 1997.
[3] Cresson J., Dynamique symbolique et tores partiellement hyperboliques, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 330 (2000) (à paraître).
[4] Gallavotti G., Arnold's diffusion in isochronous systems, Preprint, 1998.
[5] Holmes P.J., Marsden J.E., Melnikov's method and Arnol'd diffusion for perturbations of integrable Hamiltonian systems, J. Math. Phys. 23 (4) (1982) 669–675.
[6] Lochak P., Marco J.-P., Sauzin D., On the splitting of invariant manifolds in multidimensional near-integrable Hamiltonian systems, Prépublication 220, Inst. Math. Jussieu, 1999.
[7] Marco J.-P., Transition le long des chaînes de tores invariants pour les systèmes hamiltoniens analytiques, Ann. Inst. Henri-Poincaré, Phys.-Théor. 64 (2) (1996) 205–252.
[8] Palis J., de Melo W., Geometric Theory of Dynamical Systems, An Introduction, Springer-Verlag, 1982.
[9] Wiggins S., Global Bifurcation and Chaos, Appl. Math. Sci. 73, Springer-Verlag, New York, 1998.