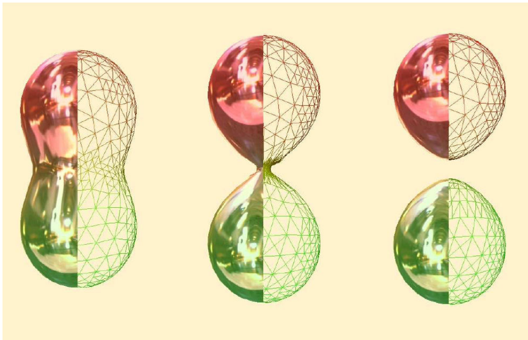
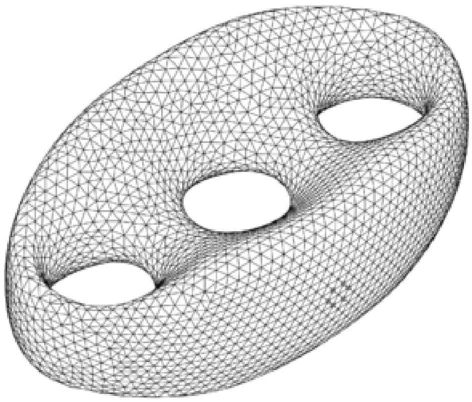
Courbure des surfaces discrètes et caractéristique d'Euler



Le but de ce projet est d'introduire la notion de courbure d'une surface discrète et celle de caractéristique d'Euler qui, toutes les deux, interviendront dans le projet relatif à la construction d'objets géométriques 3D en origami.

1. Les surfaces discrètes ou surfaces triangulées

Dans la suite, nous allons appellée surface discrète un espace Σ qui s'obtient en recollant des triangles suivant des arêtes qui ont la même longueur. En voila un exemple :



En termes plus combinatoires, on définit les surfaces discrètes comme un ensemble Σ, non vide, qui vérifie les propriétés suivantes :

- Σ est une union finie de triangles. On écrit $\Sigma = \bigcup_{i \in I} T_i$ où I est un ensemble fini d'indices.
- Deux triangles T_i et T_j, $i \neq j$, ont leur intersection soit vide, soit réduite à un sommet commun, soit réduite à une arête commune.
- toute arête est contenue dans exactement deux triangles distincts.

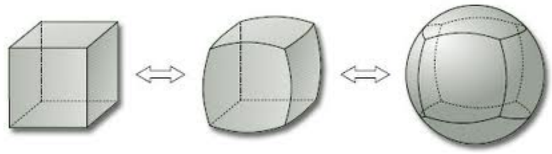
Comme premier travail, vous aller évidemment chercher À illustrer ces trois propriétés sur un exemple où elles sont vérifiées, mais aussi, pour chacune d'elle, trouver un cas qui n'est pas autorisé. Pour la première propriété, il me semble qu'un tour vers le groupe traitant les espaces fractals serait une bonne chose.

Dans toute la suite, on ne considérera que des surfaces faites d'un seul morceau et pas de plusieurs.

2. Quelques exemples de surfaces discrètes

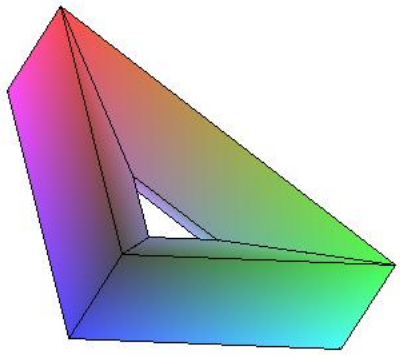
Comme exemples de surfaces discrètes, nous pouvons considérer les polyèdres réguliers. Vous pouvez tous les construires avec les patrons qui sont fournis avec ce projet. Pour information, ils sont décorés d'ensembles de Julia qui sont des fractals générés par des dynamiques. On a donc le tétraèdre, l'octaèdre, l'icosaèdre, le cube et le dodécaèdre.

Toutes ces surfaces sont homéomorphes à la sphère, c'est à dire qu'en déformant sans déchirer ces objets on peut les ramener à une sphère. Une manière de le voir est de construire un cube en papier et de soufler à l'intérieur. Le cube se transforme et sa forme se rapproche de celle d'une sphère.



Les proriétés qui ne dépendent que de la forme à déformations près sont dites topologiques. La notion de topologie est due au mathématicien Henri Poincaré.

Par exemple, en regardant la surface discrète suivante, pouvez vous dire à quel objet classique elle correspond ?



Évidemment, toutes les propriétés d'un objet géométrique ne sont pas topologiques. Il y a bel et bien une différence entre une sphère et un tétraèdre, mais ces différences sont géométriques ou disons métriques. L'une de ces propriétés est celle de courbure locale ou gaussienne d'une surface.

3. Propriétés de rafinage et fusion

On peut définir deux opérations sur les surfaces discrètes qui sont simples mais importantes.

La première est celle de rafinage. Elle consiste à remplacer un triangle donné par plusieurs triangles tout en respectant les règles de construction des surfaces discrètes.

1. Trouver une facon "canonique" de fabriquer un rafinement d'une surface discrète. Le mot "canonique" veut dire que le procédé est fixé et le même pour toutes les surfaces discrètes indépendament deleurs proriétés.

Il faut noter que le rafinage ne veut pas dire que les triangles que l'on rajoute sont fait par découpage de chaque triangle dans le plan....on peut par exemple avoir ça :

Définition 1. — *On dira qu'une surface Σ_1 est plus fine qu'une surface discrète Σ_2 si on peut obtenir Σ_1 par rafinage.*

Le point important est le suivant :

Theorem 1. — *Si deux surfaces discrètes Σ_1 et Σ_2 sont homéomorphes alors il existe une surface discrète Σ plus fine que Σ_1 et Σ_2.*

Par exemple, le tétraèdre est homéomorphe à l'objet suivant :

Une opération inverse consiste à fusioner des triangles afin de former d'autres triangles tout en respectant les régles de construction des surfaces discrètes. On a ainsi tout un panel d'opération sur les surfaces discrètes pour les manipuler.

4. Courbures d'une surface discrète

L'idée de la courbure en un point est de mesurer un "défaut de platitude" d'une surface en ce point.

4.1. Premiers pas. — Pour avoir une petite intuition de cette notion, nous allons faire un peu de travaux pratiques.

1. Prendre un morceau de papier carré et découpé à partir du milieu d'un des côtés jusqu'au centre du carré. Ensuite, faites passer un morceau sur l'autre afin de former un cone. Tracer un cercle sur votre cone de centre le sommet du cone, c'est à dire un ensemble de point qui soit à la même distance de ce sommet. Redélier la figure. Qu'observez-vous ?
2. Pouvez-vous faire une formule reliant le périmètre du cercle sur le cone et celui sur la plan ?

Ce que vous avez dû observer, c'est que le périmètre du cercle sur le cone est plus petit. Ceci est dû justement au fait que le cone n'est pas plat mais courbé vers lui même.

4.2. Le cas des surfaces discrètes. — Soit Σ une surface discrète et M un point de Σ. Soir r un réel positif assez petit pour que le cercle tracé sur Σ, de centre M et de rayon r ne rencontre pas les triangles auxquels M n'appartient pas. Notons P le périmètre de ce cercle. On note

$$K(M, r) = 2\pi - \frac{P}{r}.$$

Ce qui n'est pas évident a priori, c'est que la courbure en un point ne dépend pas de M...

1. Démontrer que si on change r en r' avec r' un rayon admissible, alors $K(M, r) = K(M, r')$.

La quantité $K(M, r)$ ne dépendent pas de r mais seulement de Σ et du point M on la note $K(M)$ et on lui donne un nom : la courbure en un point.

Définition 2. — *On appelle courbure de Σ en M la quantité*

$$K(M) = 2\pi - \frac{P}{r}.$$

Il nous reste à la calculer. C'est l'objet du prochain paragraphe.

4.3. Calcul de la courbure discrète en un point. — Vous allez démontrer le théorème suivant :

Theorem 2. — *Si M n'est pas un sommet de Σ , on a $K(M) = 0$.*

Si S est un sommet de Σ, on appelle étoile de S et note Etoile(S) l'ensemble des triangles de Σ ayant S pour sommet. la courbure en S vaut

$$K(S) = 2\pi - \sum_{T \in Etoile(S)} \alpha_T(S),$$

où $\alpha_T(S)$ est l'angle du triangle T en S.

La démonstration repose sur de simples calculs. Il faut les écrires et ne pas hésiter à faire des exemples en "vrai" avec vos objets.

1. Faire la démonstration du théorème.

Le théorème dit donc que l'essentiel de la courbure d'une surface discrète est portée par les sommets. On peut simplifier cette formule dans le cas où tous les triangles utilisés sont équilatéraux....

1. Chercher cette formule...

4.4. Les trois types de courbures en un point. — Dans ce paragraphe, vous allez donner des illustrations des trois types de courbures en un point : positive, nulle ou négative à l'aide d'une surface discrète.

Fabriquer avec du papier des exemples explicites pour chacun des types de courbures.

Nous voila prêt à introduire une notion plus obscure au niveau de sa signification géométrique....

5. Courbure globale et caractéristique d'Euler

5.1. Courbure globale. — Puisque la courbure d'une surface discrète est concentrée en les sommets, on est tenté d'en extraire, un peu comme pour un ensemble de note, une quantité représentative. Pour cela, on fait la somme sur l'ensemble des sommets pour voir ce que ca donne...

Définition 3. — *On appelle courbure globale de Σ la quantité*

$$K(\Sigma) = \sum_{S \in Sommet(\Sigma)} K(S).$$

Le premier résultat est le suivant :

Theorem 3. — *Soient n_S, n_T et n_A le nombre de sommets, de triangles et d'arêtes de Σ. On a*

$$K(\Sigma) = 2\pi(n_S - n_A + n_T).$$

Nous allons démontrer ce théorème.

1. Relier n_A et n_T.
2. Écrire en utilisant l'expression de $K(S)$ la courbure globale.
3. En utilisant une propriété connue sur les angles d'un triangles, démontrer que $K(\Sigma) = 2\pi n_S - \pi n_T$.
4. Conclure.

Nous allons maintenant étudier les propriétés de la courbure globale, en particulier son comportement lors d'un rafinement.

5.2. Invariant topologique et caractéristique d'Euler. — Avant d'énoncer le théorème principal de cette partie, nous allons faire quelques manipulations.

1. Prenez une surface discrète de votre choix et calculer la courbure gloable.
2. Faites un rafinement et calculer de nouveau la courbure globale. Qu'observez-vous ?
3. Que peut-on en déduire ?

Je pense que vous l'avez deviné à la vue du titre de cette section. Nous allons démontrer le théorème suivant :

Theorem 4. — *Soit Σ une surface discrète. L'entier $K(\Sigma)/2pi$ ne dépend que de la topologie de la surface et s'appelle la caractéristique d'Euler-Poincaré de Σ et se note $\xi(\Sigma$.*

Vos petites expériences sur la surface discrète de votre choix vont vous permettre de faire la démonstration de ce théroème sans problèmes. En effet, comme la caractéristique d'Euler d'une surface discrète est la même que celle d'une surface dont la triangulation est plus fine, on sait d'après le théorème **??** que cette propriété est topologique.

5.3. Calcul de la caractéristique d'Euler de quelques surfaces discrètes. — Faites le calcul de la caractéristique d'Euler pour :

1. Le tétraèdre.
2. Un tore.
3. Un tore à deux trous.

Que pouvez-vous en déduire ? Pouvez-vous relier la caractéristique d'Euler au nombre de trous ?

6. Quelques mots sur les mathématiciens qui apparaissent dans ce projet

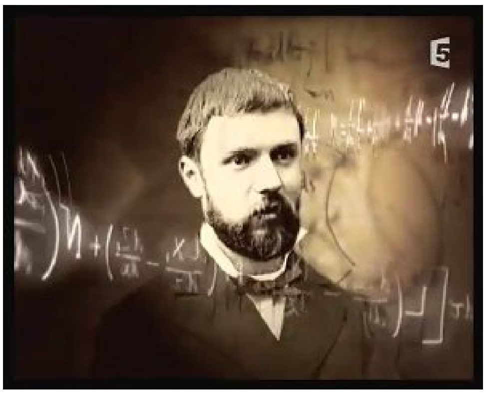
Toutes les biographies qui suivent proviennent des pages Wikipedia correspondantes.

6.1. Leonhard Euler. — Leonhard Euler, né le 15 avril 1707 à Bâle (Suisse) et mort à 76 ans le 18 septembre 1783 à Saint-Pétersbourg (Empire russe), est un mathématicien et physicien suisse, qui passa la plus grande partie de sa vie en Russie et en Allemagne. Il était notamment membre de l'Académie royale des sciences de Prusse à Berlin.

Euler fit d'importantes découvertes dans des domaines aussi variés que le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il introduisit également une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes, en particulier pour l'analyse mathématique, comme la notion de fonction mathématique. Il est aussi connu pour ses travaux en mécanique, en dynamique des fluides, en optique et en astronomie.

Euler est considéré comme un éminent mathématicien du XVIIIe siècle et l'un des plus grands et des plus prolifiques de tous les temps. Une déclaration attribuée à Pierre-Simon de Laplace exprime l'influence d'Euler sur les mathématiques : « Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous ». Il était un fervent chrétien, croyant en l'inerrance biblique, et s'opposa avec force aux athées éminents de son temps.

6.2. Henri Poincaré. — Henri Poincaré est un mathématicien, physicien, philosophe et ingénieur français né le 29 avril 1854 à Nancy et mort le 17 juillet 1912 à Paris. Il a réalisé des travaux d'importance majeure en optique et en calcul infinitésimal.



Ses avancées sur le problème des trois corps en font un fondateur de l'étude qualitative des systèmes d'équations différentielles et de la théorie du chaos ; il est aussi un précurseur majeur de la théorie de la relativité restreinte et de la théorie des systèmes dynamiques. Il est considéré comme un des derniers grands savants universels, maîtrisant en particulier l'ensemble des branches des mathématiques de son époque

Références

Ce projet est basé sur de nombreuses lectures mais parmi celles-ci, on trouve principalement :

- Frédéric Bosio, Courbure des surfaces triangulées, Le journal de maths des élèves, Vol.1 (1994), no.1, ENS Lyon.
- Les pages de Wikipedia concernant la plupart des objets évoqués dans ce projet.