Conjecture de Chirikov et Optimalité des exposants de stabilité du théorème de Nekhoroshev

Jacky CRESSON

Université de Franche-Comté, Equipe de Mathématiques de Besançon,
16 route de Gray, F 25030, Besançon cedex, France.

Résumé. - *On démontre la conjecture de Chirikov qui prédit que le splitting des variétés invariantes des tores hyperboliques d'une chaîne de transition est proportionel à l'inverse du temps d'instabilité le long de la chaîne (la vitesse de "diffusion"). En suivant un argument de P. Lochak, basé sur les idées de Chirikov, on en déduit l'optimalité des exposants de stabilité obtenus par P. Lochak pour le théorème de N. Nekhoroshev dans le cas des systèmes hamiltoniens presques intégrables convexe à 3 degrés de liberté le long des surfaces de résonance simple. La preuve utilise les récents résultats de M. Rudnev et S. Wiggins sur l'estimation du terme de Melnikov dans l'exemple d'Arnold. Avec la même méthode, nous démontrons l'optimalité du résultat de F. Fassò dans le cas linéaire en utilisant les résultats de A. Delshams, V. Gelfreich, A. Jorba et T.M. Seara. On obtient aussi comme corollaire le caractère polynomial du temps de dérive dans les systèmes à priori instables.*

Abstract. - We prove the Chirikov conjecture which predicts basically that the splitting of the invariant manifolds of hyperbolic tori in transition chain is the inverse of the instability time along such a chain (the speed of "diffusion"). As a consequence, we prove the optimality of the stability exponent obtain by P. Lochak for the Nekhoroshev theorem in the convex case for three degrees of freedom near-integrable Hamiltonian systems along simple resonant surfaces. The proof use recents results of M. Rudnev and S. Wiggins on the estimate of the Melnikov term in a generalized Arnold's example. With the same method, we prove the optimality of the stability exponents obtained by F. Fassò in the three degrees of freedom near-linear case using results of A. Delshams, V. Gelfreich, A. Jorba and T.M. Seara on the splitting. As a by-product, we prove that for initially hyperbolic Hamiltonian systems the time of instability is polynomial.

Conjecture de Chirikov et Optimalité des exposants de stabilité du théorème de Nekhoroshev

Jacky CRESSON

TABLE DES MATIÈRES

1. **Introduction** 1
2. **Chaîne de transition et instabilité** 6
   2.1. Tores hyperboliques 6
   2.2. Propriété d'obstruction et tores de transition 6
   2.3. Chaîne de transition 7
   2.4. Instabilité 7
3. **Temps de dérive le long d'une chaîne de transition** 7
   3.1. Tores de Treshchev 9
   3.2. Angles 9
   3.3. Conjecture de Chirikov 10
   3.4. Lemme de transfert 10
      3.4.1. La propriété de transfert 11
      3.4.2. Le lemme de transfert 12
   3.5. Démonstration du théorème 12
4. **Optimalités des exposants de stabilité du théorème de Nekhoroshev** 13
   4.1. Le cas isochrone 13
   4.2. Le cas convexe 15
5. **Conclusion et perspectives** 16
   5.1. Conjecture de Lochak-faible multidimensionelle 16
   5.2. Multiplicité des résonances et stabilité 17

Appendice
   A. **Démonstration du lemme de transfert** 18

Bibliographie 23

1. INTRODUCTION

On considère un système hamiltonien analytique à n degrés de libertés ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$) proche d'un système hamiltonien intégrable de la forme

$$H_\epsilon(I,\theta) = h(I) + \epsilon f(I,\theta) \tag{1}$$

où $(I,\theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ sont les coordonnées *action-angle* et $0 < \epsilon << 1$ est un petit paramètre.

On travaille maintenant à énergie fixée $h \in \mathbb{R}$. Lorsque $\epsilon = 0$, l'espace des phases est feuilleté en tores invariants de dimension n. Les solutions ayant leurs conditions initiales sur un de ces tores y restent indéfiniment et leurs variables d'action restent constantes.

Lorsque $\epsilon \neq 0$, sous une condition de non dégénérescence du hamiltonien initial ($\mid \nabla^2 h \mid \neq 0$) les tores précédents dont le vecteur fréquence vérifie une condition diophantienne persistent par le théorème K.A.M. (Kolmogorov-Arnold-Moser). Les solutions sur ces tores, qui sont de petites déformation des tores initiaux, ont des variables d'action qui varient très peu sur un temps infini.

Pour les solutions ayant des conditions initiales dans le complémentaire de ces tores, on peut par le théorème de Nekhoroshev [30], et sous une condition de convexité[1], majorer l'évolution des variables d'action sur un temps exponentiellement long.

On note $(I(t), \theta(t))$ une solution de (1). On a $\mid I(t) - I(0) \mid < \epsilon^b$ pour $t \in [0, T]$ avec $T = (1/\epsilon)\exp(1/\epsilon^a)$. P. Lochak ([23],[24]) a démontré que dans le cas où h est convexe, on a $a = b = 1/2n$. Son approche, nouvelle, lui permet d'obtenir le long des résonances de multiplicité $d = 1, \ldots, n-1$ les exposants améliorés $a = b = 1/2(n-d)$.

Dans le cas où h est affine de la forme ωI, où $\omega \in \mathbb{R}^n$ satisfait une condition diophantienne classique

$$\mid \omega.k \mid \geq \gamma / \mid k \mid^\tau, \; k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}, \tag{2}$$

l'exposant de stabilité est donné par $a = (\tau + 1)^{-1}$ (voir à ce sujet l'article de Fassò [19]).

Dans ([25],[26]), P. Lochak fait la conjecture suivante :

Conjecture de Lochak. - *Dans le cas convexe, les exposants de stabilité $a = b = 1/2n$ sont optimaux.*

Plusieurs points sous-tendent cette conjecture.

Le premier est que les résultats de P. Lochak ne peuvent pas être améliorés du point de vue des exposants. Son idée est d'utiliser les tores complétement résonnants du système intégrable et donc les orbites périodiques, alors qu'ils sont une *obstruction* dans l'approche originale de Nekhoroshev. Ces tores *périodiques* correspondent à un vecteur fréquence $\omega_0 = (I_0)$ rationnel. Le tore $I = I_0$ est feuilleté en orbites périodiques de période *commune* T telle que $T\omega_0 \in \mathbb{Z}^n$.

Il démontre tout d'abord un théorème de stabilité au voisinage de ces tores périodiques (voir le chapitre II. de [23]) qui repose sur un théorème de *moyennisation* à une phase.

Pour obtenir un théorème de stabilité *globale*, il faut, étant donné un point arbitraire dans l'espace des actions, l'*approximer* par des points correspondant à des tores périodiques. La vitesse d'approximation et la croissance de la période correspondante sont reliées par le théorème de *Dirichlet*. Ce théorème (d'*approximation simultanée*) est *optimal* (voir [23], appendice 1).

La perte d'optimalité eventuelle de la démonstration est donc liée à la moyennisation à une phase. Or, sa contribution à l'exposant de stabilité est liée au caractère Gevrey 1 des series de moyennisation (voir appendice 2 de [23]).

Le second est que ces exposants sont égaux à ceux *prédits* par B.V. Chirikov [7] pour le *temps* d'instabilité dans son approche *heuristique* de la diffusion d'Arnold. Ce raison-

[1] On a une condition en fait beaucoup plus faible appelée condition de "raideur" (voir [20]).

nement, repris et développé par P. Lochak dans ([23], §.V,[24]) se résume de la manière suivante :

On construit, en suivant l'exemple initial de V.I. Arnold [1], le long d'une surface de résonance simple, une *chaîne* de tores partiellement hyperboliques, paramétrés par les variables d'action et connectés par des orbites hétéroclines. En supposant une condition *topologique* sur la dynamique locale des tores de la chaîne, on démontre facilement l'existence d'un *ouvert* d'orbites reliant les tores extrêmes de la chaîne. De ce fait, on obtient des solutions du système hamiltonien dont la projection dans les variables d'action varie d'une quantité d'ordre de 1.

Le problème est alors de calculer le *temps de dérive* le long d'une telle chaîne. Dans son article, B.V. Chirikov suggère la conjecture suivante :

CONJECTURE DE CHIRIKOV. - *Le temps de transition le long d'une chaîne de N tores, dont le splitting homocline est σ, est $N = \sigma^{-1}$.*

P. Lochak a détaillé cette conjecture et précisé les difficultées.

La première est de trouver une méthode de calcul du temps de transition donnant clairement le *rôle* joué par le *splitting* et donc la *transversalité* des variétés invariantes dans cette estimation.

Intuitivement, ce temps se divise en deux étapes. L'une correspond à un passage proche d'un tore de la chaîne. Il est conditionné par la dynamique *minimale* sur le tore, et donc le temps d'*ergodisation*. La seconde, correspond au transport le long de l'orbite hétérocline. Ce temps est *court*, vis à vis du précédent.

La mise en forme de ce raisonnement a donné lieu à de nombreux travaux que nous discuterons en détail plus loin.

La seconde difficultée est de trouver une *minoration* du splitting dans le cas où la perturbation possède une *infinité* d'harmoniques. Cette estimation suit les premiers travaux de Melnikov, et ceux de V.I. Arnold [1]. Nous renvoyons au survey de P. Lochak [26] et à l'article de M. Rudnev et S. Wiggins ([34], introduction) pour une discussion détaillée des différents problèmes liés à cette estimation.

En général, on essaie de montrer que le terme de *Melnikov* donne la bonne estimation du splitting.

Une fois ce travail achevé, il reste à évaluer ce terme. Dans ([23],[24]), P. Lochak note que dans cette évaluation, il existe une différence essentielle entre une perturbation avec une *infinité d'harmoniques* et une perturbation en *polynômes trigonométriques*. Le calcul du terme de Melnikov (effectué par exemple par P. Lochak [23], p.118) fait ressortir le rôle des *petits diviseurs* associés au vecteur fréquence ω sur le tore. Dans le cas générique, cette dépendance du terme de Melnikov par rapport aux propriétés d'approximations permet d'atteindre la valeur *maximale* du splitting (voir le calcul heuristique de [23], p.120-121 et la démonstration dans [34]).

Autrement dit, la présence d'une infinité d'harmoniques permet d'obtenir une *vitesse de dérive optimale*.

Dans cet article, nous n'aborderons pas le problème de l'estimation du splitting. Notre objectif principale est la démonstration de la conjecture de Chirikov et de ce fait, un premier pas vers la démonstration de la conjecture de Lochak.

La conjecture de Chirikov a suscité de nombreux travaux.

En 1993, L.Chierchia et G.Gallavotti [15] publie un long article dans lequel ils estiment le temps de dérive dans le cas a priori instable (initialement hyperbolique). Ils obtiennent un temps super-exponentiellement grand relativement au paramètre perturbateur.

En 1995, J.P.Marco [28] utilise la méthode des fenêtres d'Easton [18] et obtient un temps polynomial. La démarche est générale, mais de nombreuses hypothèses techniques rendent son utilisation dans des exemples concrets difficiles. On consultera ([9],chap.2) ou cette méthode est appliquée dans l'exemple d'Arnold.

En 1996, U.Bessi [4] développe une méthode variationnelle pour calculer ce temps mais dans le cas presque intégrable. Il obtient pour l'exemple d'Arnold l'exposant prévu par P.Lochak et confirme ainsi la conjecture de B.V. Chirikov. Néanmoins, la méthode semble liée à l'exemple choisi et semble se généraliser difficilement. De plus, le rôle joué par les données classiques d'une chaîne de transition, comme le splitting ou l'ergodisation sur le tore, n'est pas *apparent*. P.Bernard [3] en déduira une estimation en $1/\mu^2$ dans l'exemple d'Arnold avec $\epsilon = 1$.

En 1997, U.Bessi [5] discute avec sa méthode un hamiltonien à quatre degrés de liberté et obtient un résultat légérement inférieur à l'exposant prévu. Cela est dû à la *localisation* des orbites de transition au voisinage d'une résonance simple (en accord avec les exposants de stabilité obtenus par P. Lochak [23] le long des résonances simples).

Dans cet article, nous démontrons la conjecture de Chirikov (en fait une estimation du temps plus précise). La démonstration repose sur une méthode *géométrique*, dont les principes sont développés dans ma thèse [9].

Le calcul du temps d'instabilité le long d'une chaîne de transition ne permet pas de démontrer la conjecture de Lochak, mais une version plus faible basée sur la remarque suivante. Dans [23], Lochak étudie le temps de stabilité le long des surfaces de résonance de multiplicité k quelconque. Sa méthode lui permet d'obtenir les exposants $a = b = 1/2(n-k)$. Autrement dit, le long d'une surface de résonance simple où les chaînes de transition sont construites, on ne peut pas esperer démontrer mieux que la

Conjecture de Lochak faible. - *Les exposants de stabilités le long d'une résonance simple $a = b = 1/2(n-1)$ sont optimaux.*

Bien entendu, on peut généraliser cette conjecture à toute résonance de multiplicité $k \geq 1$ quelconque. Dans cet article, on démontre la conjecture de Lochak faible dans le cas $n = 3$ en utilisant les estimations de splitting obtenus par M. Rudnev et S. Wiggins [34] dans l'exemple d'Arnold *généralisé*.

La méthode est mise au point sur la donnée d'une chaîne abstraite avec comme informations élémentaires une forme normale du hamiltonien au voisinage de chaque tore, ainsi qu'une estimation du splitting des variétés invariantes. Cette approche permet notamment de se défaire des propriétés très particulières des exemples étudiés jusqu'à présent. Cette méthode, générale, permet déjà de retrouver les résultats variationnels dans le cas a priori instable.

Nous appliquons ici nos idées dans le cas très particulier où il existe une forme normale dans un voisinage ouvert des tores hyperboliques dans lequel le flot est intégrable (version très simplifiée de la thèse, où la forme normale de L. Niederman [31] est considérée). Cette hypothèse est vérifiée par l'exemple d'Arnold [1] ou l'exemple de A. Delshams et al. [16].

Cette méthode relie de manière très simple le *splitting* homocline des variétés stable et instable des tores au temps de transition le long de la chaîne, ainsi qu'au temps d'ergodisation sur chacun des tores. On montre notamment que le splitting est proportionnel au temps d'instabilité, résolvant ainsi la conjecture de B.V. Chirikov [7].

La conjecture de Lochak faible est donc résolue si nous savons évaluer le splitting. Ce travail est effectué par M. Rudnev et S. Wiggins [34] dans le cas de l'exemple d'Arnold et par A. Delshams and al. [16] pour le cas isochrone.

Notre travail ramène donc la démonstration générale de la conjecture de Lochak faible à la minoration du splitting des variétés invariantes en dimension quelconque. La conjecture de Lochak est quand à elle hors de portée avec cette méthode.

Le plan de cet article est le suivant.

Dans le §.2, nous rappelons la définition d'un tore k-hyperbolique, de la propriété d'obstruction et d'une chaîne de transition. On explicite le rapport entre l'existence d'une orbite le long d'une chaîne de transition et l'instabilité des variables d'actions.

Dans le §.3, nous présentons la méthode de calcul du temps de dérive le long d'une chaîne de tores abstraite. On introduit le concept de propriété de transfert et de temps de transfert qui donne le temps *minimal* passé par une solution dans le voisinage d'un tore. On démontre la conjecture de Chirikov, à savoir que le temps d'instabilité le long d'une telle chaîne est proportionel à l'inverse du splitting.

Dans le §.4, on applique cette méthode dans l'exemple isochrone étudié par A.Delshams, V.Gelfreich, A.Jorba, T.M.Seara [16] et dans l'exemple d'Arnold généralisé étudié par M. Rudnev et S. Wiggins [32]. La conjecture de Lochak faible sur l'optimalité des exposants de stabilité du théorème de Nekhoroshev le long d'une résonance simple est alors démontrée. On discute aussi le cas linéaire à la lumière des récents résultats de F.Fassò [18] dans le cas de 3 degrés de liberté.

Le §.5. donne quelques perspectives de ce travail.

2. CHAINE DE TRANSITION ET INSTABILITÉ

Nous rappelons la définition d'un tore de transition et d'une chaîne de transition. On explicite la relation entre orbite de dérive le long d'une chaîne de transition et instabilité des variables d'action.

2.1. Tores hyperboliques.

Soit (M, Ω) une variété symplectique de dimension $2n$, $H \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ un hamiltonien sur M, X_H le champ de vecteur associé, Φ son flot et ϕ l'application au temps 1 associée. Soit $\mathcal{T}$ un tore invariant sous l'action du flot Φ.

DÉFINITION 2.1. - *Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, un tore invariant $\mathcal{T} \subset M$ est dit k-hyperbolique, si il existe un sous fibré E de $T_{\mathcal{T}} M$ et une décomposition continue $E = E^+ + E^0 + E^-$, où E_0 est l'espace tangent à $\mathcal{T}$, et une métrique riemanienne $|.|$ sur M, telle que*
i) dim E^+ =dim $E^- = k$,
ii) $|T\phi_{|E^+}| < 1$, $|T\phi_{|E^-}| > 1$,
iii) $|T\phi_{E^0}| = 1$.

On associe naturellement des variétés stable et instable, notées $W^s(\mathcal{T})$ et $W^u(\mathcal{T})$ respectivement, à $\mathcal{T}$.

Par exemple, le tore $\mathcal{T} : I = s = u = 0$ dans le système

$$\begin{array}{rcl} \dot{s} & = & -\lambda s, \\ \dot{u} & = & \lambda u, \\ \dot{I} & = & 0, \\ \dot{\theta} & = & \omega, \end{array} \tag{3}$$

avec $\lambda > 0$, $I \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in \mathbb{T}^n$, $(s, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, est un tore 1-hyperbolique. Sa variété stable $W^s(\mathcal{T})$ est de dimension $n+1$, d'équation $I = u = 0$, et sa variété instable est de dimension $n + 1$, d'équation $I = s = 0$.

2.2. Propriété d'obstruction et tores de transition.

Soit M une variété symplectique et H un hamiltonien sur M. On suppose que le système X_H possède un tore invariant hyperbolique T, contenu dans un niveau régulier de $\mathcal{H} = H^{-1}(h)$.

DÉFINITION 2.2. - *Un tore T possède la propriété d'obstruction lorsque toute sous-variété V de $\mathcal{H}$ invariante pour X_H et coupant transversalement dans $\mathcal{H}$ la sous-variété stable $W^s(T)$ vérifie $W^u(T) \subset \bar{V}$.*

On peut vérifier que le tore hyperbolique de l'exemple (3) est un tore de transition si $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ [1]. Dans ([13],[28]) on démontre que les tores k-hyperbolique des systèmes hamiltoniens proche intégrable obtenus par un théorème KAM hyperbolique [36] possèdent la propriété d'obstruction.

2.3. Chaînes de transition.

Nous avons la

Définition 2.3. - *On appellera chaîne de transition pour le système* (M, H) *une famille finie* $(T_i)_{1\leq i\leq N}$ *de tores hyperboliques, contenus dans une même variété* $\mathcal{H}$, *telle que chaque tore possède la propriété d'obstruction, et telle que* $W^s(T_i)$ *coupe transversalement dans* $\mathcal{H}$ *la variété* $W^u(T_{i+1})$, *pour* $1 \leq i \leq N-1$.

L'importance de ces objets provient du ([1]) :

Lemme 2.1. - *Soit* $(T_I)_{1\leq i\leq N}$ *une chaîne de transition, alors pour chaque voisinage* U *de chaque point* $q \in W^s(T_1)$, *et pour chaque voisinage* V *de chaque point* $p \in W^u(T_N)$, *il existe une orbite* $\xi(t)$ *de* X_H *telle que*

$$\xi(0) \in U, \ \xi(T) \in V.$$

Le temps T sera appelé *temps de dérive* ou *temps d'instabilité*.

2.4. Instabilité.

Les tores hyperboliques des systèmes hamiltoniens proche intégrable s'obtiennent par bifurcation, le long des résonances de multiplicité $k \geq 1$, des tores résonnants du système initial. Ces tores sont paramétrés par les variables d'action. Une chaîne de transition étant donnée, une orbite de dérive induit (par projection sur l'espace des actions) une dérive dans les variables d'action. Notons $I_0 \in \mathbb{R}^n$ la variable d'action paramétrant le premier tore de la chaîne et I_1 celle du dernier tore. Alors, une dérive dans l'espace des actions d'une quantité $\mid I_0 - I_1 \mid$ s'effectue en un temps T. Supposons que $\mid I_1 - I_0 \mid \geq \epsilon^b$, alors le temps de dérive (ou d'instabilité) T peut être comparé au temps de stabilité.

3. TEMPS DE DÉRIVE LE LONG D'UNE CHAINE DE TRANSITION

On considère un système hamiltonien à n degrés de liberté possèdant une *chaîne de transition* (au sens de V.I. Arnold [1]) constituée de N tores.

La méthode *géométrique* repose sur le principe (heuristique) que les orbites d'instabilité donnant l'estimation *optimal* du temps de dérive, sont celles qui relient le plus *simplement* possible les tores extrêmes de la chaîne.

L'idée intuitive est de chercher ces orbites au voisinage de l'orbite hétérocline au deux tores extrêmes de la chaîne. On recherche alors les conditions afin d'assurer une intersection transverse entre la variété instable du premier tore et la variété stable du dernier. Les conditions en question peuvent se résumer en un problème formel pour un tore de la chaîne appelé problème de *transitivité*, et un schèma *itératif*. Notre but étant d'obtenir des informations *quantitatives*, l'énoncé doit tenir compte des propriétés d'approximation du vecteur fréquence sur le tore, ainsi que la *taille* du splitting pour chacune des intersections. L'énoncé modèle du problème de transitivité est le suivant :

Problème de transitivité. -*Soit T un tore partiellement hyperbolique, et $W^s(T)$ (resp. $W^u(T)$) sa variété stable (resp. instable). Soit Δ_u (resp. Δ_s) une variété invariante qui coupe $W^s(T)$ (resp. $W^u(T)$) avec un splitting de taille δ. La variété Δ_u coupe t-elle transversalement Δ_s, en combien de temps et avec quel splitting ?*

Dans la chaîne, le tore T sera un tore T_i, $i = 2, \ldots, N-1$ et Δ_u sera la variété instable de T_1 et Δ_s sera la variété stable de T_{i+1}.

Nous allons maintenant décrire le schèma itératif. Supposons un instant que nous ayons déterminé un temps τ_2 pour lequel une partie de $W_u(T_1)$ coupe transversalement $W_s(T_3)$ avec un splitting s_2. Notons τ_{23} le temps de transition le long de l'orbite hétérocline reliant T_2 à T_3. L'image par le flot de $W_u(T_1)$ nous ramène dans un voisinage de T_3, avec un splitting s_{13}. Nous pouvons itérer la construction et obtenir un ouvert d'orbites le long de l'hétérocline reliant T_1 à T_N.

Le temps à chaque pas est décomposé en deux, en suivant les idées de P. Lochak [23]. Le premier correspond à un passage à proximité du tore et le second au suivit de la trajectoire hétérocline, que nous appelerons temps de *passage* et temps de *transition* respectivement.

Le temps de transition τ_t est borné à chaque itération, et ceci indépendamment du pas. Le temps de passage τ est proportionnel à l'inverse du splitting (une expression précise sera donnée plus loin) à chaque étape.

Ce splitting dépend de l'étape considérée. On note celui-ci s_i, $i = 1, \ldots, N$. Le temps de dérive le long de la chaîne est donc

$$\mathcal{T} = \sum_{i=2}^{N} (\tau_i + \tau_t). \tag{4}$$

On peut négliger τ_t devant τ_i (on a $\lim_{\epsilon \to 0} \tau_t/\tau_i = 0$).

Si nous ne prenons pas garde, le temps à chaque étape croît de manière exponentielle (géométrique en le splitting). Ceci est un artefact et n'a rien à voir avec la dynamique. Il est possible de contrôler le splitting pour conserver la valeur initiale à une quantité négligeable près. On obtient alors une estimation du temps de dérive de la forme

$$\mathcal{T} \leq C.N.\tau_2, \tag{5}$$

où C est une constante et τ_2 et le temps dans la première section.

Comme $\tau_2 \equiv \sigma^{-1}$, on a

$$\mathcal{T} \leq C N \sigma^{-1},$$

ce qui démontre bien la conjecture de Chirikov.

3.1. Tores intégrables.

Soient $\epsilon \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ deux paramètres tels que $0 < \epsilon < \epsilon_0$ et μ est dans un premier temps supposé indépendant de ϵ avec $\mu << \epsilon$ (on choisira par la suite $\mu = \epsilon^m$ avec $m \in \mathbb{N}$, $m \geq m_0$ ou μ exponentiellement petit en ϵ), où ϵ_0 est une constante dépendant de l'exemple choisi.

On suppose que dans un voisinage ouvert $V_{\epsilon,\mu}$ de chaque tore hyperbolique de la chaîne il existe un système de coordonnées dans lequel le hamiltonien prend la forme:

$$H_{\epsilon,\mu}(I,\theta,s,u) = \omega I + \alpha I^2 + J_\epsilon(su) + \mu h(su,\theta;\epsilon) \tag{6}$$

où $(I,\theta,s,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, avec

$$J_\epsilon(su) = \sqrt{\epsilon} su + O((su)^2) \text{ et } h(su,\theta;\epsilon) = O(su), \tag{7}$$

et ω satisfaisant une condition diophantienne

$$\mid \omega.k \mid \geq \gamma / \mid k \mid^\tau, \ k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}. \tag{8}$$

Les tores ainsi obtenu seront dit *intégrable* (le flot étant intégrables dans ce voisinage).

3.2. Angle.

Soit T un tore intégrable fixé. On note V le domaine de la forme normale intégrable et $\mathcal{H}$ la variété d'énergie contenant T. On note L_s l'ensemble des variété lagrangienne qui intersectent $W^s(T)$ transversalement dans $\mathcal{H}$. Un ensemble L sera appelé *germe de variété lagrangienne* transverse à $W^s(T)$ si il existe une variété lagrangienne $\Delta \in L_s$ telle que $L = \Delta \cap V$. On note $\mathcal{G}_s$ l'ensemble des germes de variétés lagrangiennes transverses à $W^s(T)$.

En suivant ([14], §.1), on note S_0 l'espace engendré par les vecteurs $e_\theta = (e_{\theta_1}, \ldots, e_{\theta_m})$ et e_s, et U_0 celui engendré par les vecteurs $e_I = (e_{I_1}, \ldots, e_{I_m})$ et e_u. On a $T_x W^s(T) = S_0$ pour tout $x \in W^s(T)$, où $T_x W^s(T)$ est le plan tangent à $W^s(T)$ au point $x \in W^s(T)$.

Soit $\Delta \in \mathcal{G}_s$ telle que Δ et U_0 se coupent transversalement. Il existe une *paramétrisation* de Δ, donnée par $P : S_0 \to U_0$, $P(\theta, s) = (u^-(\theta,s), I^-(\theta,s))$.

On note $p_+ = (\theta_+, s^+, 0, 0)$ un point dans l'intersection transverse de Δ avec $W^s(T)$. On a $u^-(\theta,s) = Du^-(\theta^+,s^+)h + \hat{u}_2(h)$, $I^-(\theta,s) = DI^-(\theta^+,s^+)h + \hat{I}_2(h)$, où $h = (\theta - \theta^+, s - s^+)$, $\hat{u}_2$, $\hat{I}_2$ sont des termes d'ordre 2 en h, et D est la différentielle usuelle. On suppose que $\parallel D^2\hat{u}_2 \parallel < \delta_u$, $\parallel D^2\hat{I}_2 \parallel < \delta_I$ où $\delta_{u,I} > 0$ sont des constantes. On note $\delta_1 = \max(\delta_u, \delta_I)$.

Soit A la matrice $A = DP(\theta^+, s^+)$, il existe une base unitaire contenue dans H_0, dans laquelle A est diagonale et ses valeurs propres sont de la forme $e^{i\sigma}$, $\sigma \in]-\pi/2, \pi/2[$. Nous renvoyons à ([14], §.1.4.1) pour la preuve. On appelle *angle* de Δ avec $W^s(T)$ en p^+ la quantité $\mathcal{A} = \min_{i=1,\ldots,m} \mid \sin(\sigma_i) \mid$. Bien entendu, un germe Δ est transverse à $W^s(T)$ si et seulement si $\sigma_i \neq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, m$.

3.3. Conjecture de Chirikov.

On commence par définir la notion de *chaîne abstraite* qui est une version quantitative de la notion classique de *chaîne de transition.*

(N, σ) CHAÎNE ABSTRAITE. - Une (N, σ)-*chaîne abstraite* est une famille $(T_i)_{i=1,\dots,N}$ de tores de Treshchev, qui satisfait les conditions suivantes :

(h_1) La variété instable $W^u(T_i)$ de T_i et la variété stable $W^s(T_{i+1})$ de T_{i+1} se coupent transversalement dans la surface d'énergie $\mathcal{H}$, pour $i = 1, \dots, N-1$.

On note τ_i, γ_i les constantes diophantiennes du vecteur fréquence du tore T_i, $i = 1, \dots, N$.

(h_2) La variété stable $W^s(T_{i+1})$ et la variété instable $W^u(T_i)$ se coupent avec un angle $\mathcal{A}_i$ tel que $\mathcal{A}_i \geq C\sigma$, où $\sigma = M(\epsilon).\mu$ et $M(\epsilon)$ est le terme de *Melnikov*, et $C \in \mathbb{R}$ est une constante[2].

Nous avons alors le résultat principal de cet article.

THÉORÈME (CONJECTURE DE CHIRIKOV) 2.1. - *Pour ϵ et μ suffisamment petit, le temps de dérive le long de toute (N,σ)-chaîne abstraite est*

$$\mathcal{T} \leq CN\sigma^{-\tau}, \tag{9}$$

avec C une constante et $\tau = \min_i \tau_i$.

Nous avons décomposée la démonstration en deux parties bien distinctes pour mettre en evidence le rôle fondamental de l'angle et de l'ergodisation sur le tore.

3.4. Lemme de transfert.

L'idée pour comprendre le rapport entre le splitting, l'ergodisation et le temps de dérive est de ramener ce calcul à la vérification d'une propriété quantitative locale des tores de la chaîne. Ce principe rejoint l'introduction de la *propriété d'obstruction* par V.I. Arnold [1] comme condition dynamique fondamentale en vue de démontrer l'existence d'un ouvert d'orbites de dérive le long de la chaîne.

La propriété qui va jouer ce rôle est la propriété de *transfert* introduite dans ([9], chap.2, §.1). Cette propriété donne une condition minimale sur les germes de variétés lagrangiennes transverses à $W^s(T)$ pour assurer une intersection transverse avec un germe transverse à $W^u(T)$. Toutes les quantités sont liées à la donnée de l'angle d'intersection de ces germes.

[2]Notre travail ne cherche pas à obtenir les constantes optimales. De ce fait, nous noterons C toutes les constantes intervenant au cours des démonstrations, avec un indice si nécessaire.

3.4.1. La propriété de transfert.

On commence par rappeler la version *quantitative* du lemme de persistence des intersections transverses sous faible perturbation C^1 (voir [32]). On note $L_r : S_0 \to U_0$ le graphe parallèle à la variété stable $W^s(T)$, définie par $L_r(\theta, s) = r\vec{n} + \hat{L}(\theta, s)$, où $\vec{n} = (1, \ldots, 1)$ et $\hat{L}$ telle que $\| D^2\hat{L} \| < \delta_2$. On a

LEMME DE PERSISTENCE. - *Soit $\Delta \in \mathcal{G}_s$, avec un angle σ, alors il existe une intersection transverse entre L_r et Δ si $| r | \leq C\sigma^2(\delta_1 + \delta_2)^{-1}$, et $| z - z^+ | < C\sigma(\delta_1 + \delta_2)^{-1}$ où $C > 0$ est une constante, $z = (\theta, s)$, $z^+ = (\theta^+, s^+)$.*

La preuve utilise une version quantitative du théorème des fonctions implicites (voir [10], appendice A).

Soit $p^- = (\theta^-, 0, 0, u^-) \in V$ un point de $W^u(T)$, on note B^- le voisinage p^- défini par $B^- = \{z = (\theta, s, I, u) \in V \mid | z - p^- | < \mu\}$. Soit $\delta > 0$, un *voisinage δ-adapté* à Δ est défini par

$\mathcal{B}_\delta = \{z = (\theta, I, s, u) \in V \mid | I - I(\theta, s) | < \delta, | u - u(\theta, s) | < \delta\}$. On note H_κ la *bande horizontale* définie par

$H_\kappa = \{z \in V \mid 0 < u - e^{-\kappa}(u^- + \mu/2) < \mu e^{-\kappa}/2, | I | < e^{-\kappa}, | (\theta, s) - (\theta^+, s^+) | < \mu\}$, et $\mathcal{B}_{\delta,\kappa}$ le voisinage de Δ défini par $\mathcal{B}_{\delta,\kappa} = H_\kappa \cap \mathcal{B}_\delta$.

On note $\phi(t, x)$ le flot associé au hamiltonien sous forme normale.

La propriété de transfert s'énonce comme suit.

PROPRIÉTÉ DE TRANSFERT. - *On dit qu'un tore intégrable satisfait la propriété de transfert en σ si pour tout germe $\Delta \in \mathcal{G}_s(\sigma)$ de variété lagrangienne, tout point $p^- \in W^u(T)$, il existe des fonctions $\delta_0(\sigma)$, $\delta_1(\sigma)$, avec $\delta_0 \leq \sigma$, $\delta_1 \leq \sigma^2$, et un temps $\kappa > 0$, tels que pour tout $\delta \leq \delta_0$, on a*

i. - $\phi(\kappa, \mathcal{B}_{\delta,\kappa}) \cap B^- \neq \emptyset$,

ii. - $\phi(\kappa, \Delta \cap \mathcal{B}_{\delta,\kappa}) \cap B^-$ est δ_1-proche en topologie C^1 de $W^u(T)$.

La signification de cette propriété est rendue claire par le lemme suivant.

LEMME 2.1. - *Soient T_1, T_2, T_3 trois tores intégrables. On suppose que dans V_2, on a $W^u(T_1) \in \mathcal{G}_s(\sigma)$ et $W^u(T_3) \in \mathcal{G}_u(\sigma)$, et T_2 satisfait la propriété de transfert, alors $W^u(T_1)$ coupe $W^s(T_3)$ transversalement dans $\mathcal{H}$.*

Démonstration. - On a $W^s(T_2)$ qui coupe $W^s(T_3)$ dans V_2 transversalement avec un angle d'ordre σ. Par le lemme de transfert, on a une partie de $W^u(T_1)$ au moins δ_1-proche en topologie C^1 de $W^u(T_2)$ au voisinage du point d'intersection de $W^s(T_3)$ et $W^u(T_2)$ dans V_2. On a donc, par le lemme de persistence, une intersection transverse entre $W^s(T_3)$ et $W^u(T_1)$. □

3.4.2. Le lemme de transfert.

Lemme de transfert. - *Un tore intégrable satisfait la propriété de transfert en σ avec $\kappa = C\sigma^{-\tau}$, $\delta_0 = \sigma$, $\delta_1 = \exp(-\kappa)$.*

La démonstration est donnée en appendice.

Elle se décompose en deux étapes qui correspondent à la vérification des conditions i) et ii) de la propriété de transfert.

Le point i) est une contrainte sur le comportement C^0 du germe. On veut qu'une partie du germe soit dans un voisinage B^- après un temps κ. L'angle, par le biais du lemme de persistence, fixe une proximité en topologie C^0 en les variables θ et u, à savoir σ. Cette première contrainte fixe la valeur minimal du temps de transfert. En effet, on doit forcemment ergodiser le tore avec un voisinage de taille σ. Le temps pour vérifier la contrainte sur u est quand à lui très court. La contrainte i) de la propriété de transfert, implique donc un choix de κ égale au temps d'ergodisation sur le tore pour un voisinage de taille σ. De ce fait, pour vérifier la contrainte sur la variable u, on doit se situer dans la bande $\mathcal{B}_\kappa$.

Nous avons donc

$$\text{angle} = \sigma \ \rightarrow \begin{array}{c}\text{temps de transfert}\\ = \\ \text{ergodisation en } \sigma\end{array} \rightarrow \text{localisation dans une bande } \mathcal{B}_\kappa$$

Le point ii) est une contrainte sur le comportement C^1 du germe. On veut qu'après un temps κ une partie du germe coupe entièrement le voisinage B^- (assuré par le point i) et qu'il soit δ_1 proche en topologie C^1 de $W^u(T)$. Le temps κ étant fixé par la contrainte C^0, ainsi que le voisiange $B_{\delta,\kappa}$ du germe, cette partie consiste simplement à vérifier que les inclinaisons des vecteurs tangents au germe vérifie bien, dans B^-, la contrainte ii). On utilise pour cela le formalisme des formes différentielles et un lemme de Gronwall généralisé. Ce travail est essentiellement technique.

3.5. Démonstration du théorème.

Elle est basée sur la conséquence suivante du lemme de transfert.

Lemme de transitivité. - *Soient T_1, T_2 et T_3 des tores intégrables satisfaisant les conditions (h_1) et (h_2), alors $W^u(T_1)$ et $W^s(T_3)$ se coupent transversalement dans $\mathcal{H}$. De plus, dans le domaine de la forme normale de T_3 l'angle $\mathcal{A}$ entre $W^u(T_1)$ et $W^s(T_3)$ est tel que $\mathcal{A} \geq \sigma - C.\rho$, où $\rho = \exp(-\kappa)$.*

Démonstration du lemme de transitivité. - On a $W^s(T_2)$ qui coupe $W^s(T_3)$ dans V_2 transversalement avec un angle d'ordre σ. Par le lemme de transfert, on a une partie de $W^u(T_1)$ ρ-proche en topologie C^1 de $W^u(T_2)$ au voisinage du point d'intersection de $W^s(T_3)$ et $W^u(T_2)$ dans V_2. On a donc une intersection transverse entre $W^s(T_3)$ et $W^u(T_1)$. Le temps de transition hétérocline est court par rapport au temps de transfert. L'image de $W^u(T_1)$ est alors ρ-proche de celle de $W^u(T_2)$ dans V_3. Comme l'angle d'intersection entre $W^u(T_2)$ et $W^s(T_3)$ est d'ordre σ, on en déduit $\mathcal{A} \geq \sigma - C\rho$, où $C > 0$ est une constante. $\square$

Démonstration du théorème. - On note B_{δ_i,κ_i} un voisinage de $W^u(T_1)$ dans V_i. On sait par le lemme de transfert, qu'il existe $B_{\delta_2,\kappa}$ telle que $\phi(\kappa, B_{\delta_2,\kappa}) \cap B^- \neq \emptyset$. Par le lemme de transitivité, on sait que $W^u(T_1)$ coupe transversalement $W^s(T_3)$ dans V_3 avec un angle de taille $\sigma - C\rho$. Il existe alors un voisinage $B_{\delta_3,\kappa}$ de $W^u(T_1)$, avec δ suffisamment petit, tel que $\phi(\kappa, B_{\delta_3,\kappa}) \cap B^- \neq \emptyset$. On peut donc itérer la construction et construire une famille $B_{\delta_i,\kappa}$ de voisinage avec les δ_i décroissant, tel que $\phi(T, B_{\delta_2,\kappa}) \cap B_{\delta_N,\kappa} \neq \emptyset$ avec $T = N\kappa$. $\square$

Remarque. - L'estimation du temps de dérive repose sur l'indépendance du temps de transfert dans chaque domaine V_i par rapport à la taille du voisinage adapté.

4. OPTIMALITÉ DES EXPOSANTS DE STABILITÉ DU THÉORÈME DE NEKHOROSHEV

Dans cette section, nous démontrons la conjecture de Lochak faible dans le cas lineaire et convexe. On utilise le théorème 1 et les résultats de S. Wiggins, M. Rudnev (resp. A. Delshams et all.) sur l'estimation du terme de Melnikov dans l'exemple d'Arnold généralisé (resp. la minoration du splitting dans un système hamiltonien isochrone).

4.1. Le cas isochrone.

On rappelle tout d'abord le résultat de Fassò [19] sur la stabilité des variables d'action du système

$$H_\epsilon(J, \phi, p, q) = \omega J + \frac{p^2}{2} + \epsilon(\cos q - 1) + \epsilon^m f(\phi, q), \tag{10}$$

où $(p, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$ et $(J, \phi) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2$ et $\omega = (1, \gamma)$ avec $\gamma = 1 + \sqrt{5}/2$ (le nombre d'or) et $m \in \mathbb{N}$. La fréquence ω vérifie la condition diophantienne (2) avec $\tau = 1$.

THÉORÈME ([19]). -Pour ϵ suffisamment petit, on a $\mid J(t) - J(0) \mid < \epsilon^b$ pour $\mid t \mid \leq \exp(1/\epsilon^a)$ avec $b = 4$ et $a = 1/\tau + 1$.

Nous avons le

THÉORÈME 4.1. - *L'exposant $a = 1/\tau + 1$ est optimal.*

Démonstration du théorème A. - Elle se décompose en 2 parties. La première démontre que le système (10) admet pour un bon choix de perturbation, une chaîne de transition (en fait, génériquement). On donne une minoration de l'angle. On applique ensuite le théorème 1.

a. Chaîne de transition. - On considère le système hamiltonien isochrone [16]

$$H_{\epsilon,\mu}(J,\phi,p,q) = \omega J + \frac{p^2}{2} + \epsilon(\cos q - 1) + \mu f(\phi,q), \tag{11}$$

où $(p,q) \in \mathbb{R}\times\mathbb{T}$ et $(J,\phi) \in \mathbb{R}^2\times\mathbb{T}^2$ et $\omega = (1,\gamma)$ avec $\gamma = 1+\sqrt{5}/2$ (le nombre d'or). La fréquence ω vérifie la condition diophantienne (2) avec $\tau = 1$.

On sait (voir [16], Th. 2) qu'il existe un système de coordonnées dans lequel le hamiltonien précédent s'écrit pour $\mu = \epsilon^m$ avec $m \geq 3$

$$H_{\epsilon,\mu}(I,\theta,s,u) = \omega I + J_\epsilon(su) + \mu h(su;\epsilon) \tag{12}$$

où $(s,u) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et $(I,\theta) \in \mathbb{R}^n\times\mathbb{T}^n$.

Nous avons le

Théorème 4.2. - *Il existe une séquence de tores invariant paramétrées par les actions $I_1,\ldots,I_N$ avec $\mid I_1 - I_N \mid\sim 1$ et $\mid I_k - I_{k+1} \mid\leq \sigma$ pour $i = 1,\ldots,N-1$, telle que la variété instable de chaque tores invariant coupe la variété stable du tore suivant le long de la chaîne. L'angle de chacune de ces intersections est minorée par σ.*

Démonstration. - Pour $\mu = 0$, l'ensemble $\mathcal{C} = \{(I,\theta,s,u) \in \mathbb{R}^2\times\mathbb{T}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid s = u = 0\}$ est une famille à un paramètre de tores partiellement hyperbolique. La perturbation s'annule sur $\mathcal{C}$. Dans [16], le splitting est minoré par

$$M(\epsilon) \geq O(e^{\epsilon^{-1/4}}), \tag{13}$$

où C est une constante indépendante de μ et ϵ, pour tout $\mu = \epsilon^m$ avec $m \geq 3$. Le splitting est dans ce cas indépendant du tore choisit. On peut donc contruire une chaîne de tores hyperboliques telle que la variété instable de chaque tore coupe transversalement la variété stable du suivant avec un angle σ.

De plus, le vecteur fréquence ω sur chacun des tores est diophantiens. Ces tores possèdent donc la propriété d'obstruction (voir [13],[28]). On a donc une chaîne de transition au send d'Arnold. □

b. Dérive et temps d'instabilité. - Pour avoir une dérive d'ordre 1, il faut considérer une chaîne de $N = [e^{\epsilon^{1/4}}/\mu]$ tores hyperboliques, avec $[x]$ la partie entière de x. Le théorème 2.1 donne alors un temps de dérive majoré par

$$\mathcal{T} \leq Ce^{2\epsilon^{1/4}}\mu^{-2}, \tag{14}$$

où $C > 0$ est une constante. En remplacant μ par ϵ^m avec $m \geq 3$, on obtient la borne annoncée. □

4.2. Le cas convexe.

Nous allons maintenant démontrer la conjecture de Lochak faible sur l'optimalité de l'exposant de stabilité $b = 1/2(n-1)$ dans le cas convexe. En suivant la voie qu'il a indiqué dans [23], nous calculons le temps de dérive dans l'exemple d'Arnold généralisé, lorsque μ est exponentiellement petit en ϵ. La généralisation de l'exemple d'Arnold consiste à prendre une perturbation contenant une *infinité* d'harmonique.

THÉORÈME 4.3. - *Pour les systèmes hamiltoniens à 3 degrés de liberté, convexes, l'exposant de stabilité $a = 1/4$ le long des résonances simples est optimal.*

Démonstration du théorème 4.3.- On considère le hamiltonien suivant appelé *exemple d'Arnold généralisé* et introduit par P. Lochak [23]

$$H_{\epsilon,\mu}(J,\theta,p,q) = \frac{J^2}{2} + \frac{p^2}{2} + \epsilon(\cos q - 1)(1 + \mu\epsilon^n F(q,\theta)), \tag{15}$$

où $(p,q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$, $(J,\theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ et

$$F(q,\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} F_k(q) e^{ik.\theta}, \tag{16}$$

où les coefficients de Fourier $F_k(q)$ sont des polynomes en $q \in \mathbb{T}$ satisfaisant pour tout $q \in \mathbb{T}$

$$\mid F_k(q) \mid \leq \exp(- \mid k \mid \sigma_0). \tag{17}$$

On suppose aussi que

$$F_0(q) = \bar{F} = 0, \ \forall q \in \mathbb{T}, \tag{18}$$

où $\bar{}$ est la moyenne suivant les variables d'angle.

On note $\mathcal{C} = \{(J,\theta,p,q) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}; p = q = 0\}$ la famille à 1-paramètre de tores hyperboliques. La perturbation s'annule sur $\mathcal{C}$. Tous les tores hyperboliques sont donc conservés, ainsi que leurs variétés stable et instable. M. Rudnev et S. Wiggins [34] ont évalué le terme de Melnikov pour tous les tores de $\mathcal{C}$ dont le vecteur fréquence $\omega = \partial_J H \mid_{\mu=0}$ vérifient une condition diophantienne de paramètre γ, τ, avec $0 < \gamma \leq 1$, $\tau \geq 1$, c'est à dire $\omega \in \Omega_\gamma$ où

$$\Omega_\gamma = \{\omega; \mid \omega.k \mid \geq \gamma \mid k \mid^{-\tau}, \forall k \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\} \}, \tag{19}$$

avec $\mid k \mid = \sum_{i=1}^{2} \mid k_i \mid$. Nous avons [34], le

THÉORÈME 4.4. - *Le terme de Melnikov est minoré par $C\exp(-1/\epsilon^4)$ avec $C > 0$ une constante.*

Afin de former une chaîne de transition connectant les tores hyperboliques de Ω_γ entre eux, nous choisissons

$$0 < \mu < \mu_0 = \exp(-1/\epsilon^4). \qquad (20)$$

Dans ce cas, le terme de Melnikov est le terme *dominant* pour l'angle. De plus, la densité des tores diophantiens est suffisante pour assurer des connexions hétéroclines entre les tores de Ω_γ. Nous avons donc

THÉORÈME 4.5. - *Pour $0 < \epsilon < \epsilon_0$ et $0 < \mu < \mu_0(\epsilon)$, il existe une chaîne de transition telle que l'angle d'intersection entre la variété stable d'un tore de Ω_γ et le suivant soit minoré par $M(\epsilon)\mu$, où $M(\epsilon) = C\exp(-1/\epsilon^4)$ avec $C > 0$ une constante.*

Les hypothèses du théorème 2.1. sont donc vérifiées. En choisissant $N = [C\exp(1/\epsilon^4)]$ tores hyperboliques de Ω_γ, où $[x]$ est la partie entière de x, nous obtenons une dérive des variables d'action d'ordre 1 avec un temps d'instabilité majoré par

$$T \leq C\exp(1/\epsilon^4),$$

ce qui termine la démonstration du théorème. □

Remarques:

1. La contrainte sur μ_0 ne provient pas du problème de la dominance du terme de Melnikov pour l'angle. En effet, M. Rudnev et S. Wiggins [34] ont montré que pour $\mu_0 = \epsilon^m$ avec m assez grand, le terme de Melnikov donne la bonne estimation de l'angle. Par contre, afin de construire une chaîne de transition à partir des tores de Ω_γ, pour lesquels nous connaissons l'angle, il est necessaire que le complementaire de Ω_γ soit de mesure plus petite que $M(\epsilon)$.
2. Il est toujours possible de construire une chaîne de transition dans l'exemple d'Arnold. En effet, tous les tores non résonnant de $\mathcal{C}$ vérifient la propriété d'obstruction (voir [13],[28]). Il n'est donc pas nécessaire de connecter des tores diophantiens et le problème de densité précédent ne se pose pas.
3. Lorsque $\epsilon = 1$, on obtient comme sous-produit de notre approche le fait que le temps de dérive dans un système hamiltonien initialement hyperbolique (ou à priori instable) est polynomial (voir [9],[11],[12] et [28]).

5. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

5.1. La conjecture de Lochak-faible multidimensionelle.

La démonstration de l'optimalité des exposants de stabilité pour le théorème de Nekhoroshev est maintenant soumis, par le présent travail, à l'estimation par en dessous du splitting dans l'exemple d'Arnold pour plus de 3 degrés de liberté avec μ suffisamment petit pour assurer la dominance du terme de Melnikov. Ce travail est effectué par M. Rudnev et S. Wiggins [34] dans l'exemple d'Arnold à 3 degrés de liberté.

PROBLÈME 5.1. - Evaluer le vecteur de Melnikov lorsque $n \geq 4$.

Comme l'ont remarqué A. Morbidelli et A. Giorgilli [29], les estimations du splitting sont souvent données par le reste de la forme normale résonnante optimale. Nous renvoyons à [14] où des idées de ce type sont développées.

5.2. Multiplicité des résonances et stabilité.

La conjecture de Lochak faible telle que l'avons énoncée dans l'introduction, ne permet pas d'étudier la variation des exposants de stabilité suivant la *multiplicité* de la résonance considérée. On a

k-CONJECTURE DE LOCHAK FAIBLE. - *Les exposants de stabilités $b = a = /2(n-k)$ le long d'une surface de résonance de multiplicité k sont optimaux.*

La démonstration de cette conjecture repose sur un analogue de l'exemple d'Arnold pour les résonances de multiplicité k. Précisément, on considère les systèmes hamiltoniens de la forme

$$H_{\epsilon,\mu}(I,\theta,p,q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1\ldots,n} I_i^2 + \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1,\ldots,k} p_i^2 + \epsilon(\cos q_i - 1)\right) + \epsilon\mu \prod_{i=1,\ldots,k} (\cos q_i - 1) f(\theta), \tag{21}$$

où $(I,\theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$, $(p,q) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^k$, $0 < \epsilon < 1$ et $\mu = \epsilon^m$ avec $m \in \mathbb{N}$ suffisamment grand.

Pour un bon choix de la fonction $f(\theta)$, il est possible de construire le long de toutes les lignes de résonance simple $p_i = 0$, $i = 1,\ldots,k$, une chaîne de transition (la perturbation s'annulant sur chacune de ces résonances lorsque $p_i = q_i = 0$). En $p_1 = \ldots = p_k = 0$, nous avons une résonance de multiplicité k. On peut ainsi étudier toutes les résonances de multiplicité 1 à k en regardant les orbites d'instabilité le long des ensembles $p_1 = \ldots = p_l = 0$, $l = 1,\ldots,k$.

Afin de calculer le temps d'instabilité le long de chacune de ces résonances, il faut résoudre le

PROBLÈME 5.2. - *Trouver une borne inférieure au splitting des variétés invariantes des tores hyperboliques le long des résonances de multiplicité l décrit par $p_1 = \ldots = p_l = 0$, $l = 1,\ldots,k$.*

Un exemple d'estimation du splitting dans ce cadre est donné dans ([9], appendice A, p.163-173).

REMERCIEMENTS.- Je remercie G. Gallavotti, P. Lochak, J.P. Marco, L. Niederman, M. Rudnev, S. Wiggins pour les nombreuses discussions que nous avons eues, aussi bien sur la présente méthode d'estimation des temps de dérive que sur le splitting. Je remercie aussi A. Delshams, G. Gentile, J. Laskar, V. Mastropietro, C.Simo, D. Treshchev pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Appendice A. Démonstration du lemme de transfert.

La démonstration s'effectue en deux étapes correspondant au comportement de la variété sous l'action du flot au niveau C^0 puis C^1. Dans toute la suite, nous noterons $[x]$ une quantité définie à une constante multiplicative près.

a. Démonstration de i)

Elle est immédiate car le flot est linéaire. Il suffit de noter que le temps de transfert correspond, via les travaux de [6] au temps d'ergodisation sur le tore.

Les équations du mouvements sont données par

$$\begin{array}{rcl} \dot{I} & = & \mu O(su), \\ \dot{\theta} & = & \omega + 2\alpha I, \\ \dot{s} & = & -\sqrt{\epsilon}s + sO(su), \\ \dot{u} & = & \sqrt{\epsilon}u + uO(su). \end{array} \tag{22}$$

Elles s'intégrent facilement car le produit su est une intégrale première

$$su(t) = s_0 u_0. \tag{23}$$

Nous notons $\rho = [e^{-\kappa}]$ et $\sigma = M(\epsilon)\mu$. On choisi des conditions initiales $(I_0, \theta_0, s_0, u_0)$ telles que

$$\mid I_0 \mid \leq \rho, \ \mid s_0 u_0 \mid \leq \rho, \tag{24}$$

les composantes angulaires θ_0 étant choisies dans un voisinage de taille σ d'un point de l'intersection entre $\Delta \in \mathcal{G}_s(\sigma)$ et $W^s(T)$ (en suivant les notations du §.2).

La constance du produit su au cours du temps implique qu'au temps κ, tous les points ayant des conditions initiales dans B ont des composantes en s et u vérifiant

$$\mid s(t) \mid \leq \rho, \ \mid u(\kappa) - \delta \mid \leq \sigma. \tag{25}$$

Le comportement de la variable d'action I s'en déduit immédiatement. En effet, le terme en $O(su)$ est de taille ρ durant le temps de transfert et le théorème des accroissements finis donne

$$\mid I(t) \mid \leq \rho\kappa, \text{ pour } \mid t \mid \leq \kappa. \tag{26}$$

On peut maintenant étudier le comportement des variables angulaires. Nous avons

$$\mid \theta(t) - \beta \mid \leq \mid \omega t + \theta_0 - \beta \mid + \rho\kappa, \tag{27}$$

l'inégalité provenant de (26).

Le temps κ est le temps d'*ergodisation* sur le tore $\mathbb{T}^n$ (voir à ce sujet l'article de S. Dumas [17] et le résultat sans doute optimal de J. Bourgain, F. Golse, B. Wennberg [6]). Par conséquent, en un temps κ nous avons

$$\mid \omega\kappa + \theta_0 - \beta \mid \leq [\sigma]. \tag{28}$$

La quantité κ est un $[\sigma^{-\tau}]$, et est donc déterminé à une constante près, constante à adapter à la quantité $\theta_0 - \beta$.

Ceci termine la démonstration du point i) du lemme de transfert.

b. Démonstration de ii) Elle est constituée de deux parties. La première est essentiellement une mise en forme du problème. On commence par traduire le problème de l'évolution des vecteurs tangents par le flot, en terme d'évolution de 1-forme différentielle. Ce procédé est classique et simplifie les estimations (voir [21]). En utilisant ensuite un lemme de Gronwall généralisé, on donne une majoration des inclinaisons de chacun des vecteurs tangents par rapport à la direction fortement contractante.

La seconde partie consiste à utiliser ces majorations en partant des contraintes données par le splitting sur les vecteurs tangents. Les estimations sont effectuées en trois étapes, qui correspondent au suivi des vecteurs tangents le long de la variété stable, puis le passage au voisinage du tore, et enfin le suivi le long de la variété instable. On reconnait les 3 étapes de la démonstration du λ-lemme (voir [13], [28]).

a) Equations aux variations pour les formes de base : On note

$$\nabla_x f = (\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial I_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial I_m}, \frac{\partial f}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \theta_m}) \tag{29}$$

et

$$\delta u(t) = \theta_t^* \mathrm{d}u\,,\ \delta s(t) = \theta_t^* \mathrm{d}s\,,\ \delta I_i(t) = \theta_t^* \mathrm{d}I_i\,,\ \delta\theta_i = \theta_t^* \mathrm{d}\theta_i\,. \tag{30}$$

On a

$$\dot{\delta x} = \mathcal{L}(X_H)\delta x\,, \tag{31}$$

avec $\delta x = (\delta u, \delta s, \delta I, \delta\theta)$ et $\mathcal{L}(X_H)$ la dérivé de Lie le long du champ de vecteurs X_H.

On a donc

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta I} \\ \dot{\delta\theta} \\ \dot{\delta s} \\ \dot{\delta u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mu\partial_\theta^2 h & -\mu\partial_s\partial_\theta h & -\mu\partial_u\partial_\theta h \\ 2\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu s\partial_\theta h' & -\sqrt{\epsilon} - O(su) & -2s^2 - \mu s^2 h" + O(su) \\ 0 & \mu u\partial_\theta h' & 2u^2 + 2\mu u^2 h" + O(su) & \sqrt{\epsilon} + O(su) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta I \\ \delta\theta \\ \delta s \\ \delta u \end{pmatrix}.$$

On a alors les équations aux variations suivantes pour les 1-formes :

$$\begin{array}{rcl} \dot{\delta I} & = & -\mu\partial_\theta^2 h\delta_\theta - \mu\partial_s\partial_\theta h\delta s - \mu\partial_u\partial_\theta h\delta_u, \\ \dot{\delta\theta} & = & 2\alpha\delta I, \\ \dot{\delta s} & = & -\mu s\partial_\theta h'\delta\theta - (\sqrt{\epsilon} - O(su))\delta s - (2s^2 - \mu s^2 h" + O(su))\delta u, \\ \dot{\delta u} & = & \mu u\partial_\theta h'\delta\theta + (2u^2 + 2\mu u^2 h" + O(su))\delta s + (\sqrt{\epsilon} + O(su))\delta u. \end{array} \tag{32}$$

Afin d'alléger les équations, nous noterons

$$v_x(t) = \delta x/\delta u(t), \tag{33}$$

où $x = I, \theta, s, u$. C'est bien entendu la quantité qui mesure le défaut d'approximation de la variété instable par les vecteurs tangent de Δ.

Nous avons donc les équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{rcl}\dot{v_I}(t) & = & -(\sqrt{\epsilon}+O(su))v_I+R_I,\\ \dot{v_\theta}(t) & = & -(\sqrt{\epsilon}+O(su))v_\theta+R_\theta,\\ \dot{v_s}(t) & = & -2(\sqrt{\epsilon}+O(su))v_s+R_s,\end{array}$$

où les restes sont de la forme

$$R_x = A_x v_x + B_x,$$

avec

$$A_I = A_\theta = A_s = -\mu u\partial_\theta h' v_\theta - (2u^2+2\mu u^2 h' + O(su))v_s, \tag{34}$$

et

$$\begin{array}{rcl}B_I & = & -\mu\partial_\theta^2 h v_\theta - \mu\partial_s\partial_\theta h v_s - \mu\partial_u\partial_\theta h,\\ B_\theta & = & -2\alpha v_I,\\ B_s & = & -\mu s\partial_\theta h' v_\theta - (2s^2+\mu s^2 h" + O(su)).\end{array} \tag{35}$$

b) Quelques inégalités: Soit $\mathcal{B}_\mu$ le sous-ensemble de $\mathcal{B}$ suivant:

$$\mathcal{B}_\mu = \{\ z=(s,u,y,x)\in\mathcal{B}\ \ |\ |\ su\ |<\rho,\ |\ y\ |<\rho\ \}$$

Nous avons alors le lemme :

Lemme technique. - *Dans $\mathcal{B}_\mu$, nous avons les inégalités suivantes:*

$$\begin{array}{rcl}|\ v_*(t)\ | & \leq & c_*\ |\ v_*(0)\ |\exp(\int_0^t(|\ A_*(z)-\beta_*)dz)\\ & & +c'_* e^{-(\beta_*-\sqrt{\epsilon})t}\int_0^t |\ B_*(z)\ |\exp(\int_z^t(|\ A_*(r)\ |-\sqrt{\epsilon})dr)dz,\end{array} \tag{36}$$

où $\beta_s = 2\sqrt{\epsilon}$, $\beta_I=\beta_\theta=\sqrt{\epsilon}$, et c_*,c'_* sont des constantes.

Démonstration. - C'est une conséquence du lemme de Gronwall. On commence par noter qu'il existe des constantes c et c' telles que:

$$|\ v_s\ |\leq cv_s(0)e^{-2\sqrt{\epsilon}t}+c'\int_0^t e^{-\sqrt{\epsilon}(t-s)}\ |\ B_s(z)+v_s(z)A_s(z)\ |\ \mathrm{d}z. \tag{37}$$

On rappelle que l'*inégalité de Gronwall généralisée* (voir [8], p.37) s'énonce comme suit: soient u, v, c trois fonctions, avec c différentiable, si

$$v(t)\leq c(t)+\int_0^t u(s)v(s)\mathrm{d}s, \tag{38}$$

alors

$$v(t)\leq c(0)\exp(\int_0^t u(s)\mathrm{d}s)+\int_0^t c'(s)\exp(\int_s^t u(r)\mathrm{d}r)\mathrm{d}s. \tag{39}$$

Multiplions l'équation (37) par $e^{2\sqrt{\epsilon}t}$. On a alors une inéquation du type (38):

$$|\ v_s(t)\ |\ e^{2\sqrt{\epsilon}t}\leq c\ |\ v_s(0)\ |+c'\int_0^t e^{2\sqrt{\epsilon}z}\ |\ B_s(z)\ |\ \mathrm{d}z + c'\int_0^t |\ A_s(z)\ |\ e^{2\sqrt{\epsilon}z}\ |\ v_s(z)\ |\ \mathrm{d}z.$$

On pose $c(t) = c \mid v_s(0) \mid + c' \int_0^t e^{2\sqrt{\epsilon}z} \mid B_s(z) \mid \mathrm{d}z$ et $u(z) = \mid A_s(z) \mid$. On obtient donc

$$\mid v_s(t) \mid \leq c \mid v_s(0) \mid \exp(\int_0^t (\mid A_s(z) \mid -2\sqrt{\epsilon})\mathrm{d}z) + c' e^{-\sqrt{\epsilon}t} \int_0^t \mid B_s(z) \mid e^{\int_z^t (\mid A_s(z) - \sqrt{\epsilon})\mathrm{d}r} \mathrm{d}z.$$

On obtient de même l'inégalité pour v_I, $v_\theta(t)$. Ceci termine la démonstration du lemme. □

Nous avons le lemme suivant :

LEMME DE CONTRAINTE. - *Il existe une constante $k > 0$ telle que*

$$\mid du(0) \mid > k\sigma, \mid v_s(0) \mid \leq 1/(k\sigma), \mid v_I(0) \mid \leq 1/(k\sigma), \mid v_\theta(0) \mid \leq 1/(k\sigma).$$

c) Fin de la démonstration : Nous allons terminer la démonstration du lemme de transfert en trois étapes. Pour cela, introduisons les sous-espaces suivants de $\mathcal{B}_\mu$:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B}^I & = & \{(s, u, I, \theta) \in \mathcal{B}_\mu \mid \mid u \mid < \rho \ \} \\ \mathcal{B}^{II} & = & \{(s, u, I, \theta) \in \mathcal{B}_\mu \mid \mid u \mid < \sqrt{\rho} \ , \ \mid s \mid < \sqrt{\rho} \ \} \\ \mathcal{B}^{III} & = & \{(s, u, I, \theta) \in \mathcal{B}_\mu \mid \mid s \mid < \rho \ \} \end{array}$$

Les trois étapes du lemme de transfert coincident avec les trois ensembles $\mathcal{B}^*$, où $* = I, II, III$.

LEMME A.1. - *Soit $0 < T_1 < T$, avec $T_1 = [\sigma^{-\tau}]$, tel que $z \in \mathcal{B}^I$ pour $t \leq T_1$, alors en $t = T_1$, on a*

$$\mid v_s(T_1) \mid < \frac{\rho}{\sigma}, \quad \mid v_I(T_1) \mid < \frac{\rho}{\sigma}, \quad \mid v_\theta(T_1) \mid < \frac{1}{\sigma}.$$

Démonstration. - Supposons que $\mid v_s(t) \mid \leq 1/\sigma$, $\mid v_I(t) \mid \leq 1/\sigma$, $\mid v_\theta(t) \mid \leq 1/\sigma$ dans $\mathcal{B}_I$ (hypothèse (*I)), ce qui est vrai initialement par le lemme de contrainte. Nous avons alors les inégalités suivantes dans $\mathcal{B}_I$:

$$\mid A_s \mid \leq \rho/\sigma, \mid B_s \mid \leq 1/\mu, \mid A_I \mid \leq \rho/\sigma, \mid B_I \mid \leq \mu\rho, \mid A_\theta \mid \leq \rho/\sigma, \mid B_\theta \mid \leq 1/\sigma.$$

On en déduit alors, en utilisant les inégalités (36),

$$\mid v_s(t) \mid \leq \frac{c_s}{\mu} e^{(-2\sqrt{\epsilon}+(\rho/\sigma))t} + \frac{c'_s}{(\rho/\sigma) - 2\sqrt{\epsilon}} (1 - e^{(\rho/\sigma)-2\sqrt{\epsilon})t}) \frac{e^{-\sqrt{\epsilon}t}}{\mu}.$$

De même, nous avons

$$\mid v_I(t) \mid \leq \frac{c_I}{\mu} e^{(-\sqrt{\epsilon}+(\rho/\sigma))t} + \frac{\mu\rho c'}{(\rho/\sigma) - \sqrt{\epsilon}} (1 - e^{((\rho/\sigma)-\sqrt{\epsilon})t}),$$

et

$$\mid v_\theta(t) \mid \leq \frac{c_\theta}{\mu} e^{(-\sqrt{\epsilon}+(\rho/\sigma))t} + \frac{c'_I}{(\rho/\sigma) - \sqrt{\epsilon}} (1 - e^{((\rho/\sigma)-\sqrt{\epsilon})t}) \frac{1}{\mu}.$$

On vérifie alors sans peine l'hypothèse (*I), et nos inégalités sont donc ainsi justifiées. En $t = T_1$, nous obtenons donc les ordres de grandeurs désirés. $\square$

LEMME A.2. - *Soit $T_1 < T_2 < T$, avec $T_2 = [\mu^{-\tau}\sigma^{-\tau}]$, $\kappa > 0$, tel que $z \in \mathcal{B}^{II}$ pour $T_1 < t \leq T_2$, alors en ¿$t = T_2$, on a*

$$\mid v_s(T_1) \mid < \frac{\rho^2}{\sigma}, \quad \mid v_I(T_1) \mid < \frac{\rho}{\sigma}, \quad \mid v_\theta(T_1) \mid < \frac{\rho}{\sigma}.$$

Démonstration. - Supposons $\mid v_s(t) \mid \leq [\rho/\sigma]$, $\mid v_I(t) \mid \leq [\rho/\sigma]$, et $\mid v_\theta(t) \mid \leq [1/\sigma]$ dans $\mathcal{B}_{II}$ (hypothèse (*II)). Nous obtenons alors les inégalités suivantes dans $\mathcal{B}_{II}$:

$$\mid A_s \mid \leq \rho/\sigma, \mid B_s \mid \leq \rho^2/\sigma, \mid A_I \mid \leq \mu\rho, \mid B_I \mid \leq \mu\rho, \mid A_\theta \mid \leq \rho/\sigma, \mid B_\theta \mid \leq \rho/\sigma.$$

On en déduit alors, en utilisant les inégalités (36),

$$\mid v_s(t) \mid \leq c_s \frac{\rho}{\mu} \mu e^{(-2\sqrt{\epsilon}+(\rho/\sigma))t} + \frac{c'_s}{(\rho/\sigma) - 2\sqrt{\epsilon}}(1 - e^{(\rho/\sigma)-2\sqrt{\epsilon})t})\frac{\rho^2}{\sigma}e^{-\sqrt{\epsilon}t}.$$

De même, nous avons

$$\mid v_I(t) \mid \leq c_I \frac{\rho}{\sigma} e^{(-\sqrt{\epsilon}+\mu\rho)t} + \frac{\mu\rho c'_I}{\mu\rho - \sqrt{\epsilon}}(1 - e^{(\mu\rho-\sqrt{\epsilon})t}),$$

et

$$\mid v_\theta(t) \mid \leq c_\theta \frac{1}{\mu} e^{(-\sqrt{\epsilon}+(\rho/\sigma))t} + \frac{c'_\theta \rho}{\mu((\rho/\sigma) - \sqrt{\epsilon}}(1 - e^{((\rho/\sigma)-\sqrt{\epsilon})t}).$$

On vérifie alors sans peine l'hypothèse (*II), et nos inégalités sont donc ainsi justifiées. En $t = T_2$, nous obtenons donc les ordres de grandeurs désirés. $\square$

LEMME A.3. - *En $t = \kappa$, on a*

$$\mid v_s(T_1) \mid < \frac{\rho^3}{\sigma}, \quad \mid v_I(T_1) \mid < \frac{\rho^2}{\sigma}, \quad \mid v_\theta(T_1) \mid < \frac{\rho}{\sigma}.$$

Démonstration. - Supposons $\mid v_s(t) \mid \leq [\rho^2/\sigma]$, $\mid v_I(t) \mid \leq [\rho\sigma^{-1}]$, et $\mid v_\theta(t) \mid \leq [\rho\sigma^{-1}]$ dans $\mathcal{B}_{III}$ (hypothèse (*III)). Nous obtenons alors les inégalités suivantes dans $\mathcal{B}_{III}$:

$$\mid A_s \mid \leq \rho/\sigma, \ \mid B_s \mid \leq \rho^2/\sigma, \ \mid A_I \mid \leq \rho/\sigma, \ \mid B_I \mid \leq \rho^2, \ \mid A_\theta \mid \leq \rho/\sigma, \ \mid B_\theta \mid \leq \rho.$$

On en déduit alors, en utilisant les inégalités (36),

$$\mid v_s(t) \mid \leq c_s \frac{\rho^2}{\mu} e^{(-2\sqrt{\epsilon}+(\rho/\sigma))t} + \frac{c'_s \rho^2}{\mu((\rho/\sigma) - 2\sqrt{\epsilon})}(1 - e^{(\rho/\sigma)-2\sqrt{\epsilon})t})e^{-\sqrt{\epsilon}t}.$$

De même, nous avons

$$\mid v_I(t) \mid \leq c_I \frac{\rho}{\sigma} \rho e^{(-\sqrt{\epsilon}+(\rho/\sigma))t} + \frac{\rho^2 c'_I}{\mu((\rho/\sigma) - \sqrt{\epsilon})}(1 - e^{((\rho/\sigma)-\sqrt{\epsilon})t}),$$

et

$$| v_\theta(t) | \leq c_\theta \frac{\rho}{\sigma} e^{(-\sqrt{\epsilon}+(\rho/\sigma))t} + \frac{c'_\theta \rho}{(\rho/\sigma) - \sqrt{\epsilon}} (1 - e^{((\rho/\sigma)-\sqrt{\epsilon})t}). \tag{40}$$

On vérifie alors sans peine l'hypothèse (*III), et nos inégalités sont donc ainsi justifiées. □

Conclusion: Le lemme A.3 montre que les deux plans tangents sont ρ proches en topologie C^1 dans B^-. Ceci termine la démonstration du lemme de transfert. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] V.I. Arnold, Instability of dynamical systems with several degrees of freedom, Soviet. Math. Doklady **5** (1964), 581-585

[2] G. Benettin, G. Gallavotti, Stability of motions near resonances in quasi-integrable Hamiltonian systems, Journal of Statistical Physics, Vol. 44, no. 3/4 (1986), 293-338

[3] P. Bernard, Perturbation d'un hamiltonien partiellement hyperbolique, CRAS (Comptes rendus de l'Académie des sciences) **323** (1996), 189-194

[4] U. Bessi, An approach to Arnold diffusion throught the calculus of variations, Nonlinear Analysis T.M.A. **26** (1996), 1115-1135

[5] U. Bessi, Arnold's model with two and three rotators, preprint (1996)

[6] J. Bourgain, F. Golse, B. Wennberg, The ergodisation time for linear flows on tori: application to kinetic theory, Commun. Math. Phys., à paraître.

[7] B.V. Chirikov, A universal instability of many-dimensional oscillator systems, Phys. Reports **52** (1979), 263-379.

[8] E.A. Coddington, N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York, (1955).

[9] J. Cresson, Propriétés d'instabilité des systèmes hamiltoniens proches de systèmes intégrables, Thèse, Observatoire de Paris, (1997).

[10] J. Cresson, The transfer lemma and the transitivity problem, prepublication 98/08 de l'équipe de mathématiques de Besançon, (1998).

[11] J. Cresson, Temps d'instabilité des systèmes hamiltoniens initialement hyperboliques, projet de note aux CRAS, (1998).

[12] J. Cresson, Symbolic dynamics and "Arnold diffusion", prépublication 98/35 de l'équipe de mathématiques de Besançon, (1998).

[13] J. Cresson, A λ-lemma for partially hyperbolic tori and the obstruction property, Letters in Math. Phys. **42**, 363-377, (1997).

[14] J. Cresson, P. Lochak, J-P. Marco, D. Sauzin, On the splitting of invariant manifolds in multidimensional near integrable Hamiltonian systems, manuscrit, (1998).

[15] L. Chierchia, G. Gallavotti, Drift and diffusion in phase space, Annales de l'IHP, Section physique Théorique **60** (1994), 1-144.

[16] A. Delshams, V. Gelfreich, A. Jorba, T.M. Seara, Exponentially small splitting of separatrices under fast quasi-periodic forcing, Commun. in Math. Phys., à paraître.

[17] S. Dumas, Ergodisation rates for linear flows on the torus, J. of Dynamics and Diff. equ. **3** (1991), 593-610.

[18] R.W. Easton, Orbit structure near trajectories biasymptotic to invariant tori, in *Classical mechanics and dynamical systems*, R. Devaney, Z. Nitecki, Ed. Marcel Dekher, (1981), p.55-67.

[19] F. Fassò, Lie series method for vector fields and Hamiltonian perturbation theory, ZAMP **41** (1990), 843-864

[20] Y.S. Il'yashenko, A steepness test for analytic functions, Comm. Moscow Math. Soc., 229-230, (1984).
[21] C. jones, N. Koppel, Tracking invariant manifolds in singularly perturbed systems, J. Diff. Equa. **108**, 64-88, (1994).
[22] C. Jones, T-J. Kaper, N. Koppel, Tracking invariant manifolds up to exponentially small errors, preprint, (1997).
[23] P. Lochak, canonical perturbation theory via simultaneaous approximation, Russian Math. Surveys **47** (1992), 57-133
[24] P. Lochak, Effective speed of Arnold diffusion and small denominators, Physics Letters A **143** (1990), 39-42
[25] P. Lochak, Hamiltonian perturbation theory: periodic orbits, resonances and intermittency, Nonlinearity **6** (1993), 885-904
[26] P. Lochak, Arnold diffusion: a compendium of remarks and questions, in *hamiltonian systems with three or more degrees of freedom*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. à S'agaró, Espagne, 1995, Kluwer Acad. Publ., (1997)
[27] P. Lochak, Stability of Hamiltonian systems over exponentially long times; the near-linear case, in *Hamiltonian dynamical systems: History, Theory and Applications*, IMA Volumes in Math. and Appl. **63**, Springer-Verlag, H.S. Dumas, K.R. Mayer and D.S. Schmidt eds., (1995), 221-229
[28] J.P. Marco, Transition le long des chaînes de tores invariants pour les systèmes hamiltoniens analytiques, Ann. Inst. H. Poincaré, section Physique Théorique, **64** (1995), 205-252
[29] A. Morbidelli, A. Giorgilli, On the role of high order resonances in normal forms and in separatrix splitting, Physica D 1454 (1996), 1-13
[30] N.N. Nekhoroshev, An exponential estimate for the time of stability of nearly integrable Hamiltonian systems, Russian Math. Surveys **32** (1977), 1-65
[31] L. Niederman, Dynamics around a chain of simple resonant tori in nearly integrable Hamiltonian systems, preprint Univ. Paris Sud 97-19, (1997)
[32] J. Palis, W. de Melo, *Geometric theory of dynamical systems. An introduction.*, Springer-Verlag, (1982).
[33] J. Pöschel, Nekhoroshev estimates for quasi-convex Hamiltonian systems, Math. Z. **213** (1993), 187-216
[34] M. Rudnev, S. Wiggins, Existence of exponentially small splittings and homoclinic connections between whiskered tori in weakly hyperbolic near-integrable Hamiltonian systems, Physica D, à paraître.
[35] M. Rudnev, S. Wiggins, KAM Theory near multiplicity one resonant surfaces in perturbations of a priori stable Hamiltonian systems, Journal of Nonlinear Science, **7**(2) (1997), 177-209
[36] D.V. Treshchev, The mechanism of destruction of resonance tori of Hamiltonian systems, Math. USSR Sbornik, **68**, (1991), p. 181-203.

Jacky CRESSON

Université de Franche-Comté,
Equipe de mathématiques de Besançon,
CNRS-UMR 6623,
16 route de Gray,
25030 Besançon cedex
France

couriel : cresson@math.univ-fcomte.fr