
CHAOS HAMILTONIEN ET DYNAMIQUE FRACTIONNAIRE

par

Pierre Inizan

Table des matières

Introduction	3
Partie I. Chaos hamiltonien	5
1. Rappels sur les systèmes hamiltoniens.....	5
2. Analyse des dynamiques chaotiques.....	8
2.1. Système uniformément mélangeant.....	8
2.2. Piège dynamique.....	9
2.3. Dynamique globale.....	11
2.4. Espace-temps fractal.....	14
Partie II. Dynamique fractionnaire	17
3. Plongement de A.A. Stanislavsky.....	17
3.1. Positionnement du problème.....	17
3.2. Calcul fractionnaire.....	18
3.3. Dynamique hamiltonienne selon A.A. Stanislavsky.....	25
4. Compatibilité avec un principe de moindre action fractionnaire.....	26
4.1. Plongement fractionnaire.....	27
4.2. Principe de moindre action fractionnaire.....	29
4.3. Restriction causale.....	33
4.4. Cohérence avec le formalisme de A.A. Stanislavsky.....	36
Partie III. Propriétés des systèmes hamiltoniens et lagrangiens fractionnaires	37
5. Résolution d'équations différentielles fractionnaires : l'oscillateur harmonique.....	37
5.1. Cadre d'étude.....	37
5.2. Résolution des équations.....	38
5.3. Discussion.....	41
6. Théorème de Noether et intégrales premières.....	43
6.1. Théorème de Noether.....	43
6.2. Intégrale première hamiltonienne.....	44

6.3. Discussion.....	45
Conclusion	46
Références.....	47

INTRODUCTION

Depuis les années 1970, une nouvelle physique se développe, qualifiée de non-linéaire ou de chaotique. Son objet très varié comprend notamment la turbulence hydrodynamique, la cinétique chimique, l'étude de circuits électriques, ainsi que le mouvement des astres. C'est d'ailleurs avec la mécanique céleste que la théorie du chaos trouve son origine, plus précisément avec le "problème des trois corps", qui consiste à étudier le mouvement de trois corps en interaction gravitationnelle. Ce problème conduit Henri Poincaré, à la fin du XIXe siècle, à concevoir une approche plus globale des systèmes dynamiques ; le but n'est plus de trouver des solutions exactes, mais d'étudier leur stabilité et leur sensibilité aux conditions initiales. La question sous-jacente alors est de savoir si le système solaire est « stable » sur le long terme. En 1989, Jacques Laskar [5], à l'aide de simulations numériques, montre que le système solaire est chaotique.

À cause de la complexité des systèmes qualifiés de chaotiques, beaucoup de leurs comportements sont encore mal compris. D'un point de vue mathématique, la théorie KAM a permis d'établir de nombreux résultats, mais ne semble pas suffisante pour décrire tous les phénomènes. Dans son livre *Hamiltonian Chaos & Fractional Dynamics* [11], G.M. Zaslavsky expose son analyse des systèmes hamiltoniens chaotiques. Il fait notamment un lien entre leurs dynamiques et le calcul fractionnaire. En plein essor depuis une dizaine d'années, ce formalisme a été notamment introduit pour décrire des systèmes dissipatifs. Son champ d'application est lui aussi très vaste : mécanique des fluides, chimie et économie sont quelques-uns des domaines où le calcul fractionnaire a déjà fait ses preuves.

Le travail exposé ici se situe à la jonction des systèmes hamiltoniens chaotiques et du calcul fractionnaire. Sans prétendre établir un lien solide entre ces deux domaines, il tente simplement de mettre en lumière leurs passerelles potentielles.

Dans la première partie, nous présenterons des résultats de G.M. Zaslavsky sur la caractérisation des dynamiques hamiltoniennes chaotiques. De portée très générale, cette étude semblera souvent basée sur des observations et des démarches qualitatives. Sans être rigoureuse, elle permettra cependant d'exhiber des outils et des notions utiles à la compréhension de ces systèmes, tels les temps de premiers retours, et l'aspect fractal de l'espace et du temps de certaines zones chaotiques.

À la lumière de cette structure particulière du temps, nous présenterons dans une deuxième partie les travaux de A.A. Stanislavsky. Sa modélisation du temps, vu comme une succession d'intervalles de durées aléatoires, conduit, pour le cas de systèmes hamiltoniens, à une dynamique régie par des équations fractionnaires.

De manière indépendante, J. Cresson a développé des méthodes permettant d'obtenir des équations lagrangiennes et hamiltoniennes fractionnaires. Après avoir présenté ces démarches, nous montrons que ces deux approches sont compatibles, via un principe de moindre action fractionnaire causal.

Une fois ces équations obtenues, nous tentons d'étudier quelques-unes de leurs propriétés. Plus précisément, nous présentons une méthode de résolution pour le cas de l'oscillateur

harmonique, puis signalons la difficulté d'étendre la notion d'intégrale première au cas fractionnaire.

PARTIE I

CHAOS HAMILTONIEN

1. Rappels sur les systèmes hamiltoniens

Soit I un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$.

On s'intéresse ici à des systèmes à N degrés de liberté, évoluant au cours du temps $t \in I$, et repérés par des coordonnées $x(t) \in \mathbb{R}^N$.

Définition 1 (Système hamiltonien). — On appelle système hamiltonien la donnée d'une fonction

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, p) &\longmapsto H(x, p) \end{aligned} \quad (1.1)$$

satisfaisant les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \quad (1.2)$$

Les fonctions H et p sont appelées respectivement Hamiltonien du système et moment associé à x . Les équations (1.2) sont dites équations canoniques.

L'espace $\Gamma = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ est appelé espace des phases, via lequel sera étudiée la dynamique hamiltonienne.

Exemples :

1. *L'oscillateur harmonique.* Ce système, régi par l'équation $m\ddot{x} + kx = 0$, peut-être décrit par un système hamiltonien de Hamiltonien $H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{k}{2}x^2$. Effectivement, les équations canoniques sont :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx \end{cases} \quad (1.3)$$

Le moment associé à x est $p = m\dot{x}$ et la combinaison des deux équations permet de retrouver l'équation différentielle initiale.

2. *Les billards de Sinai et de Bunimovich.* On s'intéresse à la trajectoire d'une particule qui rebondit sur les parois d'une cavité fermée. Chaque rebond est élastique : il n'y pas de perte d'énergie. De plus, l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion. Entre deux rebonds, la particule suit un mouvement rectiligne uniforme. Dans le cas du billard de Sinai, la cavité est représentée par un cercle au milieu d'un carré. La particule évolue dans l'espace compris entre le cercle et le carré (voir figure 1 à gauche). Le billard de Bunimovich a la forme d'un stade à l'intérieur duquel la particule évolue librement (voir figure 2 à gauche). Ces dynamiques peuvent être étudiées via le formalisme hamiltonien.

L'espace des phase considéré possède pour abscisse l'abscisse du point où la particule rebondit et comme ordonnée la projection sur l'axe des abscisses de la vitesse à cet instant (voir figures 1 et 2 à droite).

Sur les figures de gauche, on peut observer des trajectoires qui oscillent verticalement et semblent être "piégées" dans ces zones. Dans la suite, on attachera une attention toute particulière à ce type de comportement.

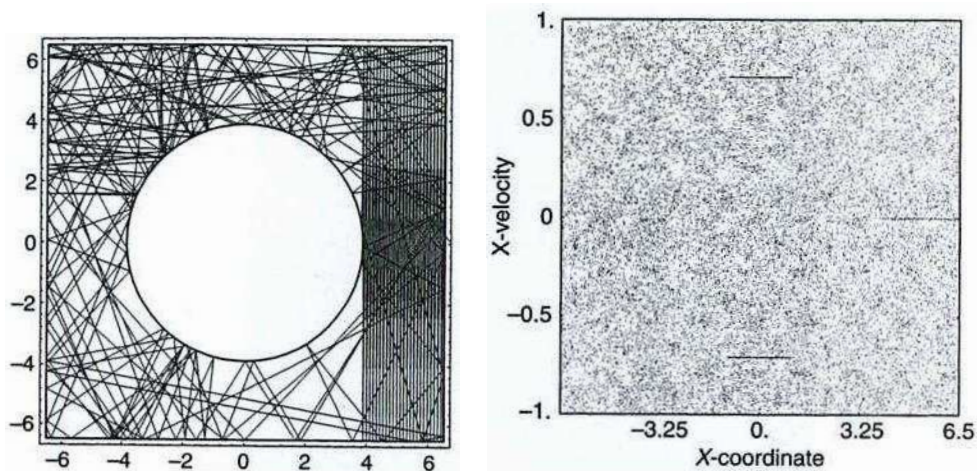


FIGURE 1. Billard de Sinai ; représentation spatiale du billard à gauche, espace des phases à droite.

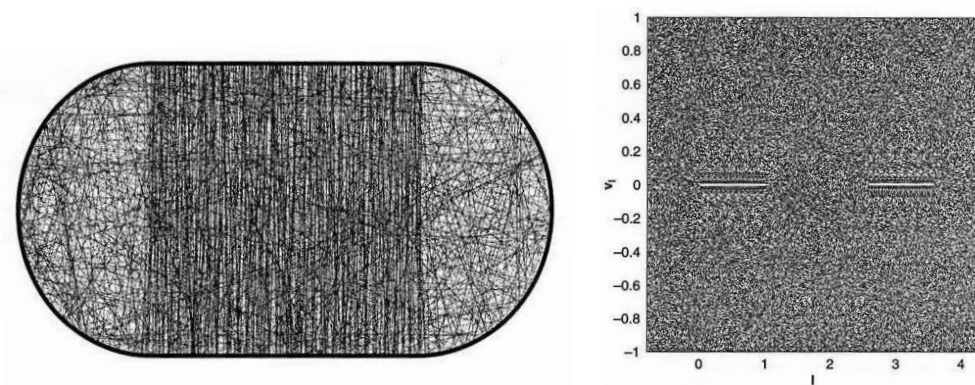


FIGURE 2. Billard de Bunimovich ; représentation spatiale du billard à gauche, espace des phases à droite.

Les systèmes hamiltoniens vérifient le critère de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles : par tout point de l'espace des phases Γ passe au plus une trajectoire.

Définition 2 (Flot). — Soit $t \in I$. On appelle *flot* la fonction

$$\begin{aligned} \phi_t : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x_0 &\longmapsto \phi_t(x_0) \end{aligned} \quad (1.4)$$

où $\phi_t(x_0)$ est le point à l'instant t de la trajectoire ayant pour condition initiale x_0 .

Pour $A \subset \Gamma$, on note $\text{mes}(A)$ le volume de A . Le flot joue un rôle important en dynamique hamiltonienne à cause du théorème suivant ;

Théorème 1 (Liouville). — *Le flot d'un système hamiltonien autonome conserve le volume dans l'espace des phases :*

$$\forall A \subset \Gamma, \forall t \in I, \text{mes}(\phi_t(A)) = \text{mes}(A) \quad (1.5)$$

Cette propriété vérifiée par les systèmes hamiltoniens a pour conséquence le théorème suivant, fondamental pour la suite de notre étude :

Théorème 2 (Théorème de récurrence de Poincaré). — *Soit un système hamiltonien dont la dynamique est contenue dans un domaine borné $\Gamma_0 \subset \Gamma$. Soit ϕ_t le flot du système, $A \subset \Gamma$ et $x_0 \in A$. Alors il existe $t_1 > 0$ tel que $\phi_{t_1}(x_0) \in A$. L'instant t_1 est appelé temps de premier retour ou temps de récurrence.*

Autrement dit, pour tout point x_1 d'une trajectoire, on peut trouver un point x_0 de la même trajectoire aussi près que l'on veut de x_0 .

En prenant $\phi_t(x_0)$ comme nouvelle condition initiale, on peut alors construire une suite $(t_i)_{i \geq 1}$ d'instant où la trajectoire issue de x_0 repasse par A .

Pour tout $A \subset \Gamma_0$, on définit la densité de probabilité $P_{rec}(t, A)$ comme étant la probabilité que le temps de premier retour, associé à un point de A , soit égal à t .

On suppose que pour tout $t > 0$, $\lim_{\text{mes}(A) \rightarrow 0} \frac{1}{\text{mes}(A)} P_{rec}(t, A)$ existe. Notons-là $P_{rec}(t)$.

$P_{rec}(t)$ est alors une densité de probabilité associée aux temps de premiers retours de tous les points de Γ_0 .

Le lemme de Kac [4] permet alors de définir un temps moyen de premier retour ;

Théorème 3 (Lemme de Kac). — *Soit un système hamiltonien dont la dynamique est bornée dans Γ . Alors $P_{rec}(t)$ admet un moment (fini) d'ordre 1.*

Corollaire 1. — *Soit un système hamiltonien dont la dynamique est bornée dans Γ . S'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $P_{rec}(t) \sim \frac{1}{t^\gamma}$ pour $t \rightarrow +\infty$, alors $\gamma > 2$.*

La définition suivante a donc un sens :

Définition 3 (Temps moyen de premier retour). — *On appelle temps de premier retour la quantité notée τ_{rec} et définie par :*

$$\tau_{rec} = \int_0^\infty t P_{rec}(t) dt \quad (1.6)$$

L'hypothèse que P_{rec} suive une loi de puissance n'est pas anodine, car d'après G.M. Zaslavsky, il semble qu'elle soit souvent vérifiée dans le cas de dynamiques chaotiques. Cette densité de probabilité va, comme on va le voir maintenant, constituer un des outils pour caractériser les dynamiques chaotiques.

2. Analyse des dynamiques chaotiques

Les résultats présentés dans cette partie sont tirés de [11, 11, 12, 13, 15, 17]. Ils relèvent pour partie de simulations numériques, de considérations qualitatives et ne se prétendent pas rigoureux. Leur but est de présenter des pistes possibles pour comprendre et étudier la dynamique de systèmes hamiltoniens chaotiques.

Nous étudions d'abord les systèmes *uniformément mélangeants* [11, 11.3] pour lesquels des résultats assez précis peuvent être obtenus. Pour de nombreux systèmes chaotiques, l'espace des phases est uniformément mélangeant presque partout. Au sein de celui-ci, il peut cependant exister des zones singulières (pouvant être de mesure nulle), dans lesquelles les trajectoires peuvent rester confinées pendant des temps longs ; elles jouent le rôle de *pièges dynamiques* [11, 11.4, 12]. Alors que les zones de mélange uniforme sont régies par des lois exponentielles, les pièges dynamiques semblent obéir à des lois de puissance. Ceux-ci influencent ainsi fortement la dynamique globale des systèmes chaotiques. De plus, ces pièges peuvent revêtir une structure fractale, non seulement spatiale, mais aussi temporelle. G.M. Zaslavsky nomme ces zones *hierarchical-islands traps (HIT)* [11, 12.2], ce que nous traduirons par *pièges fractals*. Leur description conduit alors à introduire le notion de *temps fractal* [11, 13].

2.1. Système uniformément mélangeant. — On considère ici des systèmes hamiltoniens hyperboliques (dits de type Anosov), c'est-à-dire pour lesquels chaque point de l'espace des phases Γ possède un voisinage instable. Ces systèmes sont qualitativement très chaotiques ; deux trajectoires initialement proches s'écartent exponentiellement l'une de l'autre. G.M. Zaslavsky qualifie ainsi ces systèmes d'*uniformément mélangeants*. Nous qualifierons alors l'espace des phases de *zone de mélange uniforme*.

Soit $C(T) \subset \Gamma$ l'ensemble des trajectoires périodiques de période T . Soit $\rho : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $\rho_{C(T)} : C(T) \rightarrow \mathbb{R}^+$ des densités de distribution respectivement sur Γ et sur $C(T)$. Soit enfin $N_C(T)$ le nombre de trajectoires de périodes T .

Le théorème de Bowen [1] montre alors que $C(T)$ est dense dans Γ , dans le sens suivant :

Théorème 4 (Bowen). — *Soit g une fonction intégrable sur Γ . Alors :*

$$\int_{\Gamma} g(x)\rho(x)dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{N_C(T)} \int_{C(T)} g(x)\rho_{C(T)}(x)dx \quad (2.1)$$

On peut ainsi décrire la dynamique globale (sur Γ) en se restreignant aux orbites périodiques. Par conséquent, la distribution des temps de premiers retours peut être approximée par la distribution des périodes des orbites périodiques du système, pour des périodes assez grandes. Si l'on note $\rho_C(T)$ la distribution des périodes des orbites périodiques, on a donc :

$$\rho_C(T) \sim P_{rec}(T), T \rightarrow \infty \quad (2.2)$$

L'intérêt de cette approximation réside dans le fait que l'on sait calculer $\rho_C(T)$. Effectivement, Margulis a montré [7] [8] que dans le cas de systèmes hyperboliques,

$$N_C(T) \sim \lambda e^{hT}, \quad T \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

Par ailleurs, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\rho_C(T) = \frac{k}{N_C(T)}$. La condition de normalisation $\int_0^\infty \rho_C(T) dT = 1$ donne $k \approx h$.

On obtient ainsi la forme asymptotique suivante pour P_{rec} :

$$P_{rec}(t) \sim h e^{-ht}, \quad t \rightarrow \infty \quad (2.4)$$

Dans ce cas, le temps moyen de premier retour est bien défini :

$$\tau_{rec} \approx \frac{1}{h} \quad (2.5)$$

Dans le cas de systèmes uniformément mélangeants, P_{rec} et τ_{rec} peuvent ainsi être assez bien connus. Cependant, de nombreux systèmes chaotiques, s'ils semblent "globalement" uniformément mélangeants, possèdent aussi des structures supplémentaires, semblables à des "îlots" dans les sections de Poincaré.

2.2. Piège dynamique. — Sur chacune des illustrations de la figure 3, deux structures semblent se dégager ;

- une zone qui couvre la majorité de l'espace des phases où les points semblent être repartis de manière assez uniforme (zone de mélange uniforme),
- un ensemble d'"îlots" dont les frontières se caractérisent par une surdensité de points.

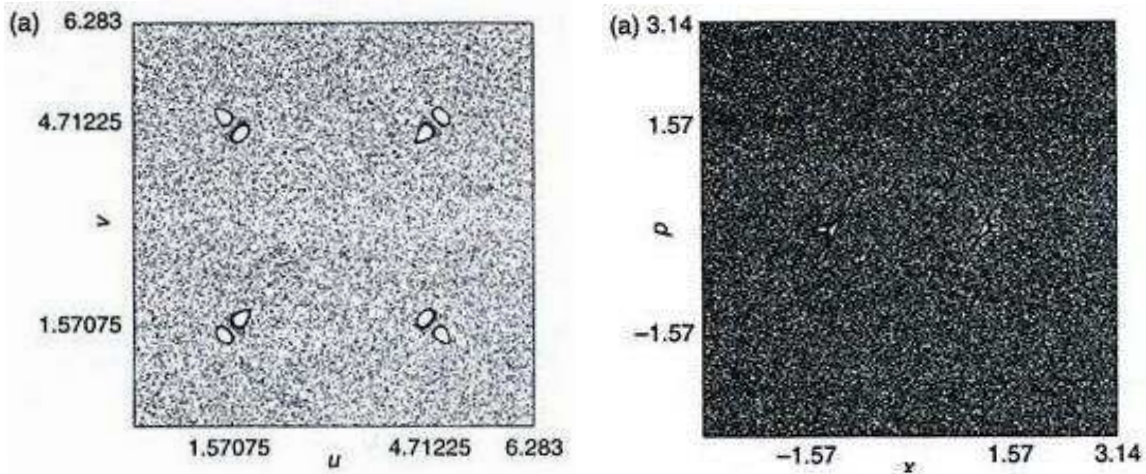


FIGURE 3. Exemples d'îlots au sein de l'espace des phases.

Notons $Z \subset \Gamma$ un tel îlot. On lui associe la densité de probabilité $P_{esc}(Z, t)$, où $P_{esc}(Z, t)$ est la probabilité de quitter Z à l'instant t .

Des simulations numériques montrent que dans de telles zones, il existe souvent $C \in \mathbb{R}$ et $\gamma_{esc} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$P_{esc}(Z, t) \sim \frac{C}{t^{\gamma_{esc}}}, t \rightarrow \infty \quad (2.6)$$

Pour tout point x_0 de Z , on note t_{rec} son temps de premier retour dans Z , t_{esc} le temps que la trajectoire issue de x_0 passe dans Z pendant l'intervalle $[0, t_{rec}]$, et t_{ext} le temps qu'elle passe hors de Z pendant $[0, t_{rec}]$. Ainsi, $t_{rec} = t_{esc} + t_{ext}$.

Le temps moyen de premier retour étant fini d'après le lemme de Kac, on en déduit que $P_{esc}(Z, t)$ admet un moment (fini) d'ordre 1 ;

Définition 4 (Temps moyen de piégeage). — Soit $Z \subset \Gamma$. On appelle temps moyen de piégeage dans Z la quantité notée τ_{esc} et définie par :

$$\tau_{esc} = \int_0^\infty t P_{esc}(Z, t) dt \quad (2.7)$$

Si P_{esc} vérifie la condition (2.6), nous avons ainsi :

$$\gamma_{esc} > 2 \quad (2.8)$$

De plus, à partir d'un certain rang, les moments de P_{esc} deviennent infinis. Cela constitue une différence notable avec le cas d'un mélange uniforme où tous les moments sont finis. C'est justement à travers ce critère que G.M. Zaslavsky définit la notion de piège dynamique :

Définition 5 (Piège dynamique). — Soit $Z \subset \Gamma$ et $P_{esc}(Z, t)$ la probabilité de quitter Z à l'instant t . Soit $m_0 \in \mathbb{N}$, $m_0 > 1$.

On dit que Z est un piège dynamique d'indice m_0 si pour tout $m \geq m_0$, le moment d'ordre m de $P_{esc}(Z, t)$ est infini.

Cette définition permet de s'extraire de l'hypothèse faite sur le comportement asymptotique (2.6) de $P_{esc}(Z, t)$. Cependant, cette dernière permet de faire un lien avec la distribution des temps de premiers retours, que l'on sait évaluer en pratique.

Effectivement, si $P_{esc}(Z, t) \sim \frac{C}{t^{\gamma_{esc}}}$, $t \rightarrow \infty$ et si l'on suppose de plus que t_{ext} correspond au temps que la trajectoire passe dans la zone de mélange uniforme, on obtient l'approximation suivante :

$$P_{rec}(Z, t) \sim P_{esc}(Z, t), t \rightarrow \infty \quad (2.9)$$

$$\text{car } e^{-ht} = o\left(\frac{1}{t^{\gamma_{esc}}}\right), t \rightarrow \infty.$$

La densité de probabilité $P_{rec}(Z, t)$ vérifie alors $P_{rec}(Z, t) \sim \frac{C}{t^{\gamma_{esc}}}$, $t \rightarrow \infty$. Par conséquent, Z est un piège dynamique si et seulement s'il existe $m_0 \in \mathbb{N}$, $m_0 > 1$ tel que pour tout $m \geq m_0$, le moment d'ordre m de $P_{rec}(Z, t)$ est infini.

On peut approcher le temps moyen de piégeage par :

$$\tau_{esc} \approx \int_{cste}^\infty t^{1-\gamma_{esc}} dt \quad (2.10)$$

Contrairement au cas uniformément mélangeant, la relation (2.10) ne fait pas apparaître de temps caractéristique pour le temps moyen qu'une trajectoire passe dans un piège dynamique. Il est alors possible que ce temps puisse être grand, justifiant la dénomination de "piège".

Notons par ailleurs que le temps moyen de piégeage est d'autant plus grand que γ_{esc} est petit ; γ_{esc} caractérise ainsi la "viscosité" du piège.

2.3. Dynamique globale. — Les billards de Sinaï et de Bunimovich sont une bonne illustration de ces pièges dynamiques inclus dans un espace des phases uniformément mélangeant. La figure 4 montre la dépendance de $P_{rec}(t)$ en fonction de t (en coordonnées logarithmiques) pour ces deux billards.

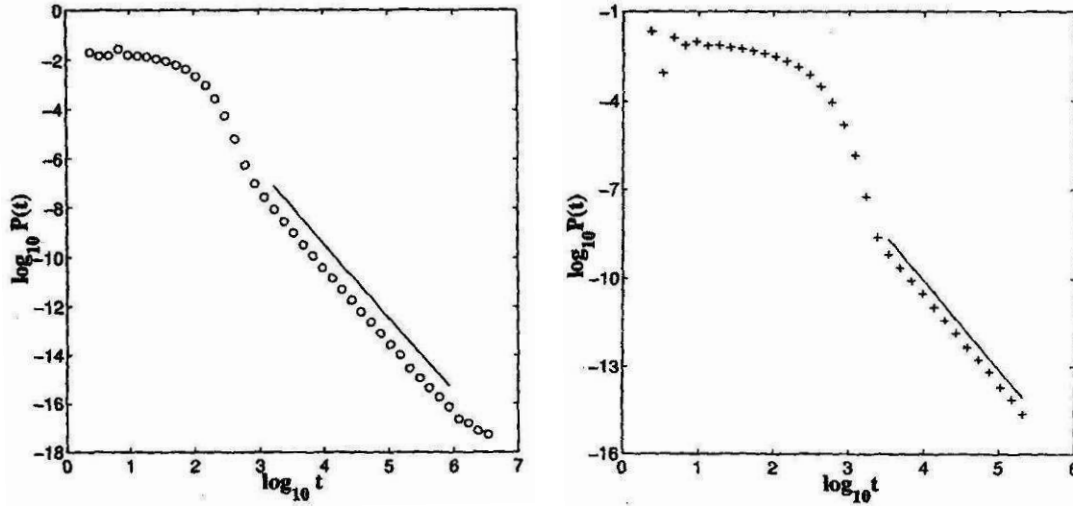


FIGURE 4. Allure de P_{rec} en fonction de t , à gauche pour le billard de Sinaï, à droite pour celui de Bunimovich.

Pour chacun des graphes, on peut distinguer deux comportements différents :

$$P_{rec}(t) \approx \begin{cases} h e^{-ht}, & t < t^* \\ \frac{C}{t^3}, & t > t^* \end{cases} \quad (2.11)$$

Pour $t < t^*$, la zone de mélange uniforme détermine la dynamique, mais pour $t > t^*$, ce sont les stries visibles dans les espaces des phases des figures 1 et 2 (à droite) qui conditionnent le comportement global des billards. Pour les deux systèmes, elles constituent des pièges dynamiques d'indice $m_0 = 2$.

Pour un système chaotique quelconque, il existe a priori plusieurs pièges dynamiques d'indices différents. On peut alors s'attendre à la forme suivante pour $P_{rec}(t)$:

$$P_{rec}(t) \sim \sum_k \frac{C_k}{t^{\gamma_k}}, t \rightarrow \infty \quad (2.12)$$

Chacune des zones singulières va influencer la dynamique globale. Plus précisément, l'équation (2.12) implique :

$$P_{rec}(t) \sim \frac{C_{min}}{t^{\gamma_{min}}}, t \rightarrow \infty \quad (2.13)$$

où $\gamma_{min} = \min_k \gamma_k$ est associé au piège dynamique possédant le temps moyen de piégeage le plus grand.

Les grandes valeurs des temps de premiers retours sont dues au passage des trajectoires par un piège dynamique (la figure 5 illustre cette idée). Ainsi,

$$P_{rec}(t) \sim P_{rec}(Z, t), t \rightarrow \infty \quad (2.14)$$

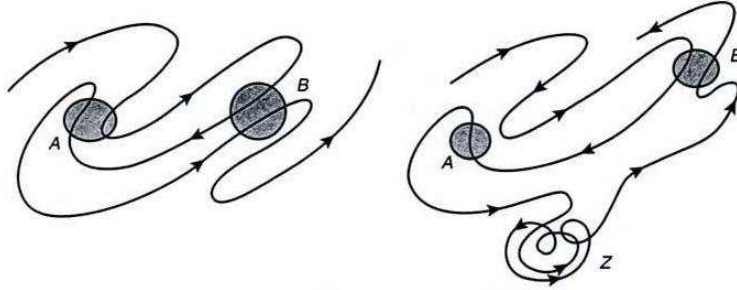


FIGURE 5. Influence du piège sur la dynamique globale.

Nous venons donc de voir que les pièges dynamiques influencent grandement, voire déterminent, l'allure de $P_{rec}(t)$, pour t grand. Ainsi, bien que pouvant être de mesure nulle (comme pour le billard de Sinai), ces zones jouent un rôle important dans la dynamique globale des systèmes chaotiques.

En prenant en compte les diverses zones de l'espace des phases, la densité de probabilité $P_{rec}(t)$ fournit donc un outil pour comprendre la géométrie de l'espace des phases. Bien que dépendant d'un certain type de temps, elle fournit des informations, tel le paramètre γ_{esc} , de nature spatiale.

À travers les temps de premiers retours t_{rec} , nous avons étudié des portions de trajectoires évoluant entre les instants t_0 et $t_0 + t_{rec}$, appelées *quasi-cycles*. Une trajectoire complète peut être vue comme une succession de quasi-cycles, associés à des temps de premiers retours t_1, \dots, t_n, \dots . Les t_i sont des variables aléatoires, de loi probabilité associée $P_{rec}(t)$, que l'on supposera indépendantes entre elles. Afin de comprendre la dynamique globale, on est donc amené à considérer la quantité $S_n = \sum_{i=1}^n t_i$, à laquelle on associe le temps de premier passage $N_t = \max\{n \in \mathbb{N} \mid S_n \leq t\}$.

Il semble légitime de s'attendre à ce qu'une somme d'intervalles temporels soit encore un intervalle temporel. D'un point de vue probabiliste, cela revient à exiger que P_{rec} soit une loi stable ;

Définition 6 (Loi stable). — Soit X_1, X_2 des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant la loi P . Soit $c_1, c_2 > 0$ et X_3 la variable aléatoire définie par $X_3 = c_1 X_1 + c_2 X_2$.

On dit que la loi P est stable si X_3 est distribuée suivant cette loi.

La loi gaussienne est une loi stable, mais elle n'est pas la seule ;

Définition 7 (Distribution de Lévy). — Soit P une densité de probabilité sur \mathbb{R} , soit $0 < \alpha \leq 2$. On dit que P est une distribution de Lévy d'indice α s'il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqt} e^{-c|q|^\alpha} dq \quad (2.15)$$

P sera alors noté P_α .

La condition $0 < \alpha \leq 2$ est une condition nécessaire d'existence.

Lévy [6] a montré le résultat suivant ;

Théorème 5 (Lévy). — Soit P_α une distribution de Lévy d'indice α .

Alors P_α est une loi stable.

Le cas $\alpha = 1$ correspond à une loi de Cauchy et pour $\alpha = 2$, on retrouve la loi gaussienne.

Enfin, pour $0 < \alpha < 2$, P_α possède le comportement asymptotique suivant :

$$P_\alpha(t) \sim \frac{C}{t^{\alpha+1}}, t \rightarrow \infty \quad (2.16)$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de Feller [3] :

Théorème 6 (Feller). — 1. Si $\sigma_0^2 = \langle (t_i - \tau_{rec})^2 \rangle$ est fini, alors :

$$Prob\{N_t \geq \frac{t}{\tau_{rec}} - \sqrt{n} \frac{\sigma_0 \xi}{\tau_{rec}}\} \rightarrow \phi(\xi) \quad (2.17)$$

où ϕ la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-y^2/2} dy \quad (2.18)$$

2. Soit ϕ_S la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\phi_S(t) = \int_t^{\infty} P_{rec}(u) du \quad (2.19)$$

Soit h une fonction lentement variable :

$$\forall c \in \mathbb{R}, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(ct)}{h(t)} = 1 \quad (2.20)$$

S'il existe $1 < \alpha < 2$ tels que $\phi_S(t) = \frac{h(t)}{t^{\alpha+1}}$, alors :

$$Prob\{N_t \geq \frac{t}{\tau_{rec}} - \frac{b_t}{\tau_{rec}^{(1+\alpha)/\alpha}} \xi\} \rightarrow P_\alpha(\xi) \quad (2.21)$$

où b_t vérifie $\phi_S(b_t) \sim \frac{1}{t^{1/\alpha}}$.

Remarquons que l'indice α de la distribution de Lévy n'est autre que $\gamma_{esc} - 1$. Le cas $0 < \alpha < 1$ est donc exclu à cause du lemme de Kac.

Le théorème peut se traduire de la manière suivante pour notre étude :

– dans une zone de mélange uniforme, où le moment d'ordre 2 de P_{rec} est fini, le temps construit à partir de la succession des temps de premiers retours tend vers une loi gaussienne,

- dans une zone de piégeage, où P_{rec} suit une loi de puissance, ce temps s'apparente à une distribution de Lévy d'indice α .

Le coefficient α caractérise la viscosité du piège dans l'espace des phases ; il est donc relatif à l'aspect spatial de la dynamique. On peut s'attendre à ce que la composante temporelle de la dynamique soit aussi caractérisée par un indice, que l'on notera β . Le lien entre espace et temps va apparaître via la structure interne des pièges dynamiques.

2.4. Espace-temps fractal. — Les illustrations 6 et 7 montrent que les pièges dynamiques peuvent posséder des structures auto-similaires : la frontière de chaque île principale est composée d'îles plus petites dont les frontières sont elles aussi composées d'îles, et ainsi de suite. La géométrie de ces pièges présente donc un aspect fractal. Par ailleurs, il semblerait que plus l'île est petite, plus le temps de piégeage relatif est grand ; le temps dans ce type de piège revêt donc lui aussi une structure fractale, ce qui nous conduit à la définition suivante :

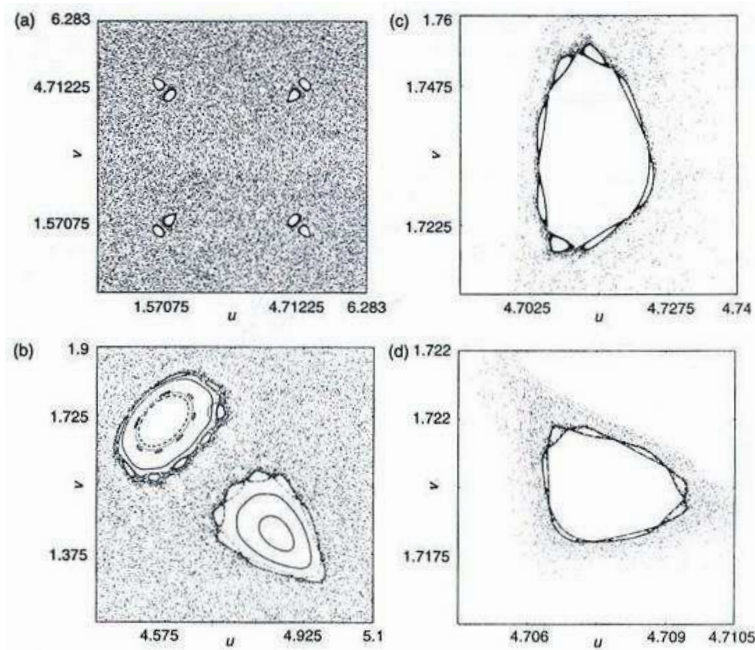


FIGURE 6. Structure fractale d'un piège, schéma 2-4-8-8

Définition 8 (Piège fractal). — Soit Z un piège dynamique composé de domaines A_1, \dots, A_n, \dots emboîtés ; $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$. Notons Γ_n l'aire de A_n et T_n le temps moyen qu'une trajectoire passe dans cette zone. On dit que Z est un piège fractal s'il existe $\lambda_T > 1$ et $\lambda_\Gamma < 1$ telles que les suites $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$ et $(T_n)_{n \geq 1}$ vérifient :

$$\begin{cases} T_{n+1} = \lambda_T T_n \\ \Gamma_{n+1} = \lambda_\Gamma \Gamma_n \end{cases} \quad (2.22)$$

Les paramètres λ_Γ et λ_T sont appelés coefficients d'échelle.

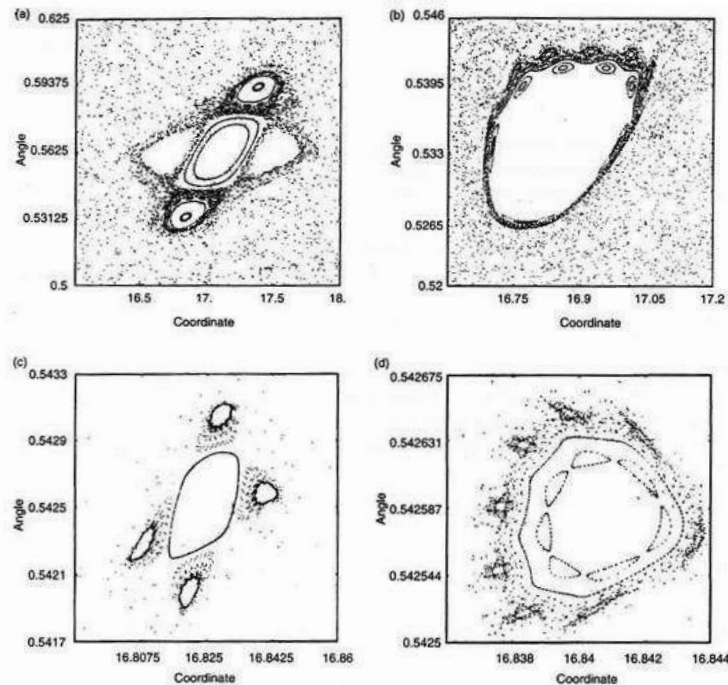


FIGURE 7. Structure fractale d'un piège, schéma 4-8-4-8

Le terme *piège fractal* est la traduction que nous avons choisie pour *hierarchical-islands trap (HIT)* (voir [11, 12.2]).

La structure fractale de ces pièges dynamiques permet de mieux comprendre l'aspect "visqueux" de ces zones : une trajectoire qui arrive dans un tel piège devra sortir de chaque zone successivement, chaque étape prenant un temps non négligeable. De manière imagée, un piège fractal peut être vu comme un labyrinthe dont la complexité augmente plus on s'approche du centre.

Nous venons donc de voir d'une part que le théorème de Feller fournit un indice α caractérisant la structure spatiale des pièges, et d'autre part que l'espace et le temps pouvaient avoir tous deux des allures fractales, caractérisées par des coefficients d'échelle λ_T et λ_T . Il peut donc sembler légitime d'attribuer au temps associé au système dynamique un coefficient β , contrepartie de l'indice α .

G.M. Zaslavsky relie alors ces paramètres via un procédé de renormalisation [11, 17]. Plusieurs points nous semblant encore obscurs, nous nous contentons d'en présenter les grandes lignes.

Si l'on considère des éléments infinitésimaux de temps et d'espace, respectivement notés δt et δx , ceux-ci semblent intervenir dans la dynamique du système sous la forme $(\delta t)^\beta$ et $(\delta x)^\alpha$.

Si l'on considère une équation caractéristique du système, celle-ci doit être invariante sous le procédé de renormalisation suivant : $\delta t \rightarrow \lambda_T \delta t$, $\delta x \rightarrow (\lambda_T)^{1/2} \delta x$, à cause de la structure auto-similaire des pièges.

Les coefficients caractéristiques doivent alors vérifier la relation $(\lambda_\Gamma)^{\alpha/2} (\lambda_T)^\beta = 1$, ce qui conduit à :

$$\frac{2\beta}{\alpha} = \frac{|\ln \lambda_\Gamma|}{\ln \lambda_T} = \mu \quad (2.23)$$

Le paramètre μ est appelé *exposant de transport*. G.M. Zaslavsky montre [11, 12.3] que $\gamma_{esc} = \mu + 2$.

Par exemple, pour les billards de Sinaï et de Bunimovich, μ vaut donc 1. La condition $1 < \alpha < 2$ imposée par le théorème de Feller contraint β :

$$\frac{1}{2} < \beta < 1 \quad (2.24)$$

Enfin, l'auteur précise que si dans la pratique il est possible de trouver μ , rien ne permet pour l'instant d'évaluer α et β séparément.

Nous venons de voir qu'un certain nombre de dynamiques hamiltoniennes chaotiques peuvent être étudiées à partir de leurs distributions de temps de premiers retours P_{rec} . Celles-ci prennent en compte les deux types de zones qui apparaissent dans l'espace des phases : les zones de mélange uniforme et les pièges dynamiques. Dans les premières, P_{rec} prend une forme exponentielle; tous ces moments sont finis et la succession des temps de premiers retours conduit à un comportement gaussien. Dans les pièges, P_{rec} suit asymptotiquement une loi de puissance, pour laquelle les moments sont infinis à partir d'un certain rang; la limite gaussienne est remplacée par une distribution de Lévy d'indice α . Ce paramètre de caractère spatial caractérise la viscosité de ces zones singulières. Bien que pouvant être de tailles négligeables, les pièges dynamiques ont une influence globale sur les trajectoires. De plus, la structure fractale en espace mais aussi en temps de certains pièges dynamiques conduit à introduire un coefficient β caractérisant le temps associé à la dynamique de systèmes hamiltoniens chaotiques.

Nous avons conscience que nombre d'affirmations mériteraient de plus amples justifications et qu'un flou subsiste sur certains résultats et sur les systèmes auxquels ceux-ci s'appliquent. Cependant, l'analyse précédente fournit des pistes sérieuses pour essayer de comprendre ces systèmes complexes.

Comme nous allons maintenant le voir, le travail de A.A. Stanislavsky présenté dans son article *Hamiltonian Formalism of Fractional Systems* [10] semble s'inscrire dans cette démarche.

PARTIE II

DYNAMIQUE FRACTIONNAIRE

L'étude précédente de systèmes hamiltoniens chaotiques montre que le temps intervenait de manière tout à fait particulière ; il semble présenter une structure fractale à laquelle il peut être associé un coefficient β . Même si ces concepts sont encore mal définis, il semble légitime de penser que les équations différentielles régissant la dynamique de tels systèmes vont devoir prendre en compte de telles propriétés sur la variable d'évolution t .

En modélisant ce temps par une succession d'intervalles temporels aléatoires distribués suivant une loi stable, A.A. Stanislavsky montre dans son article *Hamiltonian Formalism of Fractional Systems* [10] que les équations hamiltoniennes deviennent fractionnaires ; les dérivées temporelles classiques sont remplacées par des dérivées fractionnaires. Cette substitution peut s'apparenter à une procédure de *plongement*, notion introduite par J. Cresson [2]. Ce dernier développe aussi une autre méthode pour obtenir des équations fractionnaires, dans le cas d'une dynamique lagrangienne ; l'utilisation d'un principe variationnel fractionnaire permet de déduire une équation d'Euler-Lagrange fractionnaire. Cependant, les deux démarches ne conduisent pas aux mêmes équations dans le cas général. Nous montrons cependant qu'en contraignant les variations dans le principe variationnel fractionnaire, il est possible de retrouver les équations issues d'un plongement.

Le formalisme développé par A.A. Stanislavsky devient alors compatible avec un principe de moindre action fractionnaire, ce qui lui permet d'une part de s'extraire de certaines hypothèses fortes, et d'autre part de reposer sur un principe physique fondamental.

3. Plongement de A.A. Stanislavsky

Nous présentons d'abord la modélisation du temps faite par A.A. Stanislavsky. Quelques notions sur les dérivées fractionnaires sont ensuite exposées, afin de comprendre dans un troisième temps le formalisme hamiltonien fractionnaire obtenu par cet auteur.

3.1. Positionnement du problème. — Dans le cas de systèmes chaotiques, la notion de temps fractal peut conduire à considérer la variable d'évolution t comme une succession d'intervalles temporels positifs T_i , variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Il semble naturel de s'attendre à ce que la succession de deux intervalles temporels soit un intervalle temporel ; cette remarque impose que la loi de distribution des T_i soit stable. Les lois stables, dont les distributions de Lévy sont un exemple, sont notamment caractérisées par un indice $0 < \beta < 2$. Celle considérée par A.A. Stanislavsky, notée g_β , possède la fonction caractéristique suivante :

$$\int_0^\infty e^{iwy} g_\beta(y) dy = \exp\{-|w|^\beta \exp[-i(\pi\beta/2)\text{sign}(w)]\} \quad (3.1)$$

La contrainte $T_i \geq 0$ impose $0 < \beta < 1$.

Comme nous le suggérons par la notation, et bien que ce ne soit pas encore clair, ce paramètre β peut certainement être relié au coefficient caractéristique du temps fractal. Remarquons que la contrainte $0 < \beta < 1$ est compatible avec celle de la relation (2.24).

On considère la variable aléatoire discrète $N_t = \max\{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^n T_i \leq t\}$. Sa limite continue existe et est notée $S(t)$. C'est un temps de premier passage : $S(t)$ représente l'instant où le temps stochastique relatif à $\sum_{i=1}^n T_i$ atteint pour la première fois t .

La variable aléatoire $S(t)$ croît en fonction du temps t . Ce processus peut alors être vu comme un nouveau temps, aléatoire, dépendant du temps t ; $S(t)$ sera qualifié de *temps interne*.

La densité de probabilité $p^S(t, \tau)$ définie sur \mathbb{R}^+ et associée à $S(t)$ est donnée par :

$$p^S(t, \tau) = L_{(u)}^{-1}[e^{ut - \tau u^\beta} u^{\beta-1}](t) \quad (3.2)$$

où $L_{(u)}^{-1}$ est la transformée de Laplace inverse, suivant la variable u .

La valeur de $p^S(t, \tau)$ représente la probabilité qu'à l'instant t , le temps interne $S(t)$ soit égal à τ .

Le processus $S(t)$ est utilisé pour des subordinations de processus ; si $Y(t)$ est un processus, on lui associe le processus $Y(S(t))$ dit *subordonné* où le temps devient aléatoire.

A.A. Stanislavsky s'inspire de cette idée de subordination ; il étudie le formalisme hamiltonien où le temps t est remplacé par $S(t)$.

Cette modélisation du temps pourrait, sous réserve de plus amples justifications, s'appliquer au cas des pièges fractals, où les T_i seraient associés à des temps de piégeage dans les différentes îles emboîtées.

Définissons à présent le système étudié : on considère comme processus principal un système hamiltonien autonome, de Hamiltonien $H(x, p)$, régi par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \quad (3.3)$$

En remplaçant t par $S(t)$, A.A. Stanislavsky montre alors que le système hamiltonien subordonné est régi par des équations fractionnaires. Avant de présenter ce résultat, il convient de donner quelques définitions et résultats sur les dérivées fractionnaires.

3.2. Calcul fractionnaire. — Nous donnons ici les définitions des dérivées de Riemann-Liouville et de Caputo. Nous montrons ensuite les formules d'intégration par parties pour ces deux opérateurs, ainsi que celle concernant la transformée de Laplace de la dérivée de Caputo.

3.2.1. Définitions des opérateurs fractionnaires. — Il existe plusieurs définitions pour les dérivées fractionnaires (voir par exemple [9]). Nous en retiendrons deux : celles de Riemann-Liouville et celles de Caputo. Il semblerait que ces deux opérateurs soient ceux les plus utilisés dans la pratique ; A.A. Stanislavsky [10] privilégie la dérivée de Caputo alors que J. Cresson [2] utilise celle de Riemann-Liouville. Il est aisé d'étendre les résultats de ce dernier aux dérivées de Caputo ; c'est ce que nous ferons par la suite, afin de relier les travaux de ces deux auteurs.

La construction de la dérivée de Riemann-Liouville est la suivante : on construit un opérateur ${}_a\mathcal{D}_t^{-k}$, pour $k \in \mathbb{N}^*$, primitive k -ième d'une fonction, c'est-à-dire vérifiant :

$$\frac{d^k}{dt^k} \left[{}_a\mathcal{D}_t^{-k} f(t) \right] = f(t) \quad (3.4)$$

Cette définition se généralise naturellement à $k \in \mathbb{R}_*^+$. On définit ensuite la dérivée d'ordre α , ${}_a\mathcal{D}_t^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$, comme la dérivée n -ième usuelle composée à l'opérateur ${}_a\mathcal{D}_t^{-(n-\alpha)}$, où n est l'entier naturel vérifiant $n - 1 \leq \alpha < n$:

$${}_a\mathcal{D}_t^\alpha = \frac{d^n}{dt^n} \circ {}_a\mathcal{D}_t^{-(n-\alpha)} \quad (3.5)$$

Plus précisément, soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_*^+$, $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n - 1 \leq \alpha < n$, et $m - 1 \leq \beta < m$. Soit de plus $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$, avec $a < b$, f une fonction définie sur $]a, b[$.

Remarque : les indices α et β de cette partie auront tous deux la même signification que le paramètre β utilisé par A.A. Stanislavsky, à rapprocher donc du coefficient du temps fractal, mais pas à celui de la géométrie fractale des pièges.

Définissons d'abord notre opérateur "primitive k -ième" :

Définition 9. — Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall t > a, \quad {}_a\mathcal{D}_t^{-k} f(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{k-1} f(\tau) d\tau \quad (3.6)$$

Cet opérateur vérifie pour $k = 1$:

$$\forall t > a, \quad \frac{d}{dt} {}_a\mathcal{D}_t^{-1} f(t) = \frac{d}{dt} \int_a^t f(\tau) d\tau = f(t) \quad (3.7)$$

et pour $k > 1$:

$$\begin{aligned} \forall t > a, \quad \frac{d}{dt} {}_a\mathcal{D}_t^{-k} f(t) &= \frac{1}{(k-1)!} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{k-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \left[(t-\tau)^{k-1} f(\tau) \right]_{\tau=t} \\ &\quad + \frac{1}{(k-1)!} \int_a^t \frac{d}{dt} \left((t-\tau)^{k-1} f(\tau) \right) d\tau \\ &= 0 + \frac{(k-1)}{(k-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{k-2} f(\tau) d\tau \\ &= {}_a\mathcal{D}_t^{-(k-1)} f(t) \end{aligned}$$

On en conclut que pour tout $t > a$, $\frac{d^k}{dt^k} \left({}_a\mathcal{D}_t^{-k} f(t) \right) = f(t)$.

La fonction Γ définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}_*^+ \quad (3.8)$$

permet d'étendre la factorielle aux réels positifs. Effectivement, $\Gamma(1) = 1$ et pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, donc $\Gamma(k+1) = k!$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

La définition précédente s'étend donc naturellement sur \mathbb{R}_*^+ :

Définition 10 (Intégrale fractionnaire à gauche). —

$$\forall t > a, \quad {}_a\mathcal{D}_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (3.9)$$

Nous obtenons ainsi une première définition de dérivée fractionnaire :

Définition 11 (Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche)

$$\forall t > a, \quad {}_a\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t - \tau)^{n-1-\alpha} f(\tau) d\tau \quad (3.10)$$

Les définitions précédentes utilisent le "passé" de f , c'est-à-dire les valeurs de $f(\tau)$ pour $a < \tau < t$. Nous pouvons définir des opérateurs similaires, qui utilisent le "futur" de f , c'est-à-dire les valeurs de $f(\tau)$ pour $t < \tau < b$;

Définition 12. — Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall t < b, \quad {}_t\mathcal{D}_b^{-k} f(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_t^b (\tau - t)^{k-1} f(\tau) d\tau \quad (3.11)$$

Cet opérateur vérifie quant à lui

$$\frac{d^k}{d(-t)^k} \left({}_t\mathcal{D}_b^{-k} f(t) \right) = \left(\frac{-d}{dt} \right)^k \left({}_t\mathcal{D}_b^{-k} f(t) \right) = f(t), \text{ pour } t < b. \quad (3.12)$$

On définit ensuite les deux opérateurs suivants ;

Définition 13 (Intégrale fractionnaire à droite). —

$$\forall t < b, \quad {}_t\mathcal{D}_b^{-\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_t^b (\tau - t)^{\beta-1} f(\tau) d\tau \quad (3.13)$$

Définition 14 (Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite)

$$\forall t < b, \quad {}_t\mathcal{D}_b^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \beta)} \left(-\frac{d}{dt} \right)^m \int_t^b (\tau - t)^{m-1-\beta} f(\tau) d\tau \quad (3.14)$$

Notons ${}^\alpha E_b^\beta$ l'ensemble des fonctions f telles que ${}_a\mathcal{D}_t^\alpha f$ et ${}_t\mathcal{D}_b^\beta f$ sont définies.

En faisant porter les dérivations directement sur la fonction plutôt que sur l'intégrale, on définit la dérivée de Caputo :

Définition 15 (Dérivée fractionnaire de Caputo à gauche)

$$\forall t > a, \quad {}^C_a\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (3.15)$$

Définition 16 (Dérivée fractionnaire de Caputo à droite). —

$$\forall t < b, \quad {}^C_t\mathcal{D}_b^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \beta)} (-1)^m \int_t^b (\tau - t)^{m-1-\beta} f^{(m)}(\tau) d\tau \quad (3.16)$$

Soit ${}^{\alpha}\tilde{E}_b^{\beta}$ l'ensemble des fonctions f telles que ${}^C_a\mathcal{D}_t^{\alpha}f$ et ${}^C_t\mathcal{D}_b^{\beta}f$ sont définies.

Les opérateurs dont l'intégrale porte sur $[a, t]$ (respectivement $[t, b]$) seront qualifiés d'*opérateurs passé* (respectivement *opérateurs futur*).

Notons que les opérateurs fractionnaires englobent les opérateurs classiques : il suffit de prendre $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$. Cette remarque va nous servir de principe "garde-fou" : tous les résultats liés au formalisme fractionnaire devront englober le cas classique (voir [2] pour plus de détails).

Cependant, ces opérateurs ne sont pas aisément manipulables car les propriétés fondamentales des dérivées usuelles ne s'étendent pas au cas fractionnaire ;

– la règle de Leibniz ne s'applique plus :

$${}_a\mathcal{D}_t^{\alpha}(f \cdot g) \neq {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha}f \cdot g + f \cdot {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha}g \quad (3.17)$$

(les dérivées fractionnaires ne sont donc pas des dérivations au sens strict),

– la dérivée d'une composée ne s'exprime pas aisément :

$${}_a\mathcal{D}_t^{\alpha}f(g(t)) \neq {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha}g(t) \cdot f'(g(t)) \quad (3.18)$$

– la composée d'opérateurs n'est pas simple :

$${}_a\mathcal{D}_t^{\alpha}{}_a\mathcal{D}_t^{\beta} \neq {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha+\beta} \quad (3.19)$$

Quelques propriétés subsistent toutefois ; nous allons maintenant présenter celles qui nous seront utiles par la suite.

3.2.2. Propriétés des opérateurs fractionnaires. — Précisons d'abord le lien entre les dérivées de Caputo et celles de Riemann-Liouville :

$$\forall f \in {}^{\alpha}E_b^{\beta} \cap {}^{\alpha}\tilde{E}_b^{\beta}, \left\{ \begin{array}{l} {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha}f(t) = {}^C_a\mathcal{D}_t^{\alpha}f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a) \\ {}_t\mathcal{D}_b^{\beta}f(t) = {}^C_t\mathcal{D}_b^{\beta}f(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(b-t)^{k-\beta}}{\Gamma(k-\beta+1)} f^{(k)}(b) \end{array} \right. \quad (3.20)$$

La majorité des articles que nous avons consulté, dont [10], se limitent à $0 < \alpha, \beta < 1$. Sauf mention explicite, nous ferons de même à partir de maintenant. Bien que classiques, nous démontrons les résultats suivants afin d'éviter toute imprécision par la suite.

Donnons d'abord la formule d'intégration par parties pour les dérivées de Riemann-Liouville :

Théorème 7. — *Soit $0 < \alpha < 1$, $f, g \in {}^{\alpha}E_b^{\beta}$, $a < t < b$. Alors :*

$$\int_a^t [{}_a\mathcal{D}_t^{\alpha}f(\tau)] g(\tau) d\tau = \int_a^t f(\tau) [{}_{\tau}\mathcal{D}_t^{\alpha}g(\tau)] d\tau \quad (3.21)$$

$$\int_t^b [{}_{\tau}\mathcal{D}_b^{\alpha}f(\tau)] g(\tau) d\tau = \int_t^b f(\tau) [{}_t\mathcal{D}_{\tau}^{\alpha}g(\tau)] d\tau \quad (3.22)$$

En particulier,

$$\int_a^b [{}_a\mathcal{D}_b^{\alpha}f(\tau)] g(\tau) d\tau = \int_a^b f(\tau) [{}_{\tau}\mathcal{D}_b^{\alpha}g(\tau)] d\tau \quad (3.23)$$

Démonstration. —

$$\begin{aligned}
\int_a^t [{}_a\mathcal{D}_t^\alpha f(\tau)] g(\tau) d\tau &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{d}{d\tau} \left(\int_a^\tau (\tau-u)^{-\alpha} f(u) du \right) g(\tau) d\tau \\
&= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \left(\int_a^\tau (\tau-u)^{-\alpha} f(u) du \right) g'(\tau) d\tau \\
&\quad + \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} g(\tau) \int_a^\tau (\tau-u)^{-\alpha} f(u) du \right]_{\tau=a}^{\tau=t} \\
&= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \left(\int_u^t (\tau-u)^{-\alpha} g'(\tau) d\tau \right) f(u) du \\
&\quad + g(t) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-u)^{-\alpha} f(u) du \\
&= \int_a^t f(u) [{}_u^C\mathcal{D}_t^\alpha g(u)] du \\
&\quad + g(t) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-u)^{-\alpha} f(u) du \\
&= \int_a^t f(u) \left[{}_u\mathcal{D}_t^\alpha g(u) - g(t) \frac{(t-u)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right] du \\
&\quad + g(t) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-u)^{-\alpha} f(u) du \\
&= \int_a^t f(u) [{}_u\mathcal{D}_t^\alpha g(u)] du
\end{aligned}$$

La seconde formule se montre de la même manière. □

Contrairement au cas classique, aucun terme de bord n'apparaît dans cette formule. Il n'en va pas de même pour la dérivée de Caputo ;

Théorème 8. — Soit $0 < \alpha < 1$, $f, g \in {}_a^\alpha \tilde{E}_b^\beta$, $a < t < b$. Alors :

$$\begin{aligned}
\int_a^t [{}_a^C\mathcal{D}_t^\alpha f(\tau)] g(\tau) d\tau &= \int_a^t f(\tau) [{}_t^C\mathcal{D}_t^\alpha g(\tau)] d\tau \\
&\quad + g(t) {}_a\mathcal{D}_t^{-(1-\alpha)} f(t) - f(a) {}_a\mathcal{D}_t^{-(1-\alpha)} g(a) \quad (3.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_t^b [{}_b^C\mathcal{D}_\tau^\alpha f(\tau)] g(\tau) d\tau &= \int_t^b f(\tau) [{}_t^C\mathcal{D}_\tau^\alpha g(\tau)] d\tau \\
&\quad + g(t) {}_t\mathcal{D}_b^{-(1-\alpha)} f(t) - f(b) {}_t\mathcal{D}_b^{-(1-\alpha)} g(b) \quad (3.25)
\end{aligned}$$

En particulier,

$$\int_a^b [{}^C\mathcal{D}_t^\alpha f(t)] g(t) dt = \int_a^b f(t) [{}^C\mathcal{D}_t^\alpha g(t)] dt + g(b) {}_a\mathcal{D}_b^{-(1-\alpha)} f(b) - f(a) {}_a\mathcal{D}_b^{-(1-\alpha)} g(a) \quad (3.26)$$

Démonstration. —

$$\begin{aligned} \int_a^t [{}^C\mathcal{D}_\tau^\alpha f(\tau)] g(\tau) d\tau &= \int_a^t [{}_a\mathcal{D}_\tau^\alpha f(\tau)] g(\tau) d\tau - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (\tau - a)^{-\alpha} g(\tau) d\tau \\ &= \int_a^t f(\tau) [{}_\tau\mathcal{D}_t^\alpha g(\tau)] d\tau - f(a) {}_a\mathcal{D}_t^{-(1-\alpha)} g(a) \\ &= \int_a^t f(\tau) [{}^C\mathcal{D}_t^\alpha g(\tau)] d\tau + \frac{g(t)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau \\ &\quad - f(a) {}_a\mathcal{D}_t^{-(1-\alpha)} g(a) \\ &= \int_a^t f(\tau) [{}^C\mathcal{D}_t^\alpha g(\tau)] d\tau + g(t) {}_a\mathcal{D}_t^{-(1-\alpha)} f(t) \\ &\quad - f(a) {}_a\mathcal{D}_t^{-(1-\alpha)} g(a) \end{aligned}$$

Il en va de même pour l'autre formule. □

Les opérateurs futur et passé sont ainsi liés via les formules d'intégration par parties. Cette remarque va être à la base de toute la section 4.

Nous exhibons aussi un lien entre dérivée fractionnaire et transformée de Laplace via le résultat suivant. Cette relation sera développée dans la section 5.

Lemme 1. — Soit $f \in C^\infty([a, +\infty[)$, $n - 1 \leq \gamma < n$, et $a \leq 0$. Alors :

$$L[{}^C\mathcal{D}_t^\gamma f](s) = s^\gamma L[f](s) - e^{-as} \left[s^{\gamma-1} f(a) + s^{\gamma-2} f'(a) + \dots + s^{\gamma-n} f^{(n-1)}(a) \right] \quad (3.27)$$

En particulier,

$$L[{}^C\mathcal{D}_t^\gamma f](s) = s^{\gamma-n} L[f^{(n)}](s) = s^\gamma L[f](s) - s^{\gamma-1} f(0) - \dots - s^{\gamma-n} f^{(n-1)}(0) \quad (3.28)$$

Démonstration. — Cas $a = 0$:

$$\begin{aligned}
L[{}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma f](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \int_0^t (t-\tau)^{n-1-\gamma} f^{(n)}(\tau) d\tau \right] dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \int_0^{+\infty} \int_\tau^{+\infty} e^{-st} (t-\tau)^{n-1-\gamma} f^{(n)}(\tau) dt d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-s(u+\tau)} u^{n-1-\gamma} f^{(n)}(\tau) du d\tau \\
&= \left(\int_0^{+\infty} e^{-su} \frac{u^{n-1-\gamma}}{\Gamma(n-\gamma)} du \right) \cdot \left(\int_0^{+\infty} e^{-s\tau} f^{(n)}(\tau) d\tau \right) \\
&= L\left[\frac{t^{n-1-\gamma}}{\Gamma(n-\gamma)}\right](s) \cdot L[f^{(n)}](s) \\
&= s^{\gamma-n} L[f^{(n)}](s)
\end{aligned}$$

Sachant que $L[f^{(n)}](s) = s^n L[f](s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
L[{}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma f](s) &= s^{\gamma-n} [s^n L[f](s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)] \\
&= s^\gamma L[f](s) - s^{\gamma-1}f(0) - s^{\gamma-2}f'(0) - \dots - s^{\gamma-n}f^{(n-1)}(0)
\end{aligned}$$

Cas général :

$$\begin{aligned}
L[{}_a^C \mathcal{D}_t^\gamma f](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1-\gamma} f^{(n)}(\tau) d\tau \right] dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-st} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \int_0^t (t-\tau)^{n-1-\gamma} f^{(n)}(\tau) d\tau \right] dt \\
&\quad + \int_0^{+\infty} e^{-st} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \int_a^0 (t-\tau)^{n-1-\gamma} f^{(n)}(\tau) d\tau \right] dt \\
&= s^{\gamma-n} L[f^{(n)}](s) + \int_a^0 \left(\int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{(t-\tau)^{n-1-\gamma}}{\Gamma(n-\gamma)} dt \right) f^{(n)}(\tau) d\tau \\
&= s^{\gamma-n} L[f^{(n)}](s) + \int_a^0 L\left[\frac{(t-\tau)^{n-1-\gamma}}{\Gamma(n-\gamma)}\right](s) f^{(n)}(\tau) d\tau \\
&= s^{\gamma-n} L[f^{(n)}](s) + s^{\gamma-n} \int_a^0 e^{-s\tau} f^{(n)}(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

En intégrant par parties,

$$\begin{aligned}
\int_a^0 e^{-s\tau} f^{(n)}(\tau) d\tau &= \int_a^0 s e^{-s\tau} f^{(n-1)}(\tau) d\tau + \left[e^{-s\tau} f^{(n)}(\tau) \right]_a^0 \\
&= s \int_a^0 e^{-s\tau} f^{(n-1)}(\tau) d\tau + f^{(n-1)}(0) - e^{-as} f^{(n-1)}(a)
\end{aligned}$$

ce que l'on généralise par récurrence :

$$\begin{aligned}
\int_a^0 e^{-s\tau} f^{(n)}(\tau) d\tau &= s^n \int_a^0 s e^{-s\tau} f(\tau) d\tau + \left[s^{n-1} f(0) + \dots + f^{(n-1)}(0) \right] \\
&\quad - e^{-as} \left[s^{n-1} f(a) + \dots + f^{(n-1)}(a) \right]
\end{aligned}$$

Dans l'équation (3.29), les termes en $f^k(0)$ se simplifient. Finalement,

$$L[{}^C\mathcal{D}_t^\gamma f](s) = s^\gamma L[f](s) - e^{-as} \left[s^{\gamma-1} f(a) + s^{\gamma-2} f'(a) + \dots + s^{\gamma-n} f^{(n-1)}(a) \right] \quad (3.29)$$

□

3.3. Dynamique hamiltonienne selon A.A. Stanislavsky. — Le temps intervient dans le système hamiltonien principal à travers H , x , p , et les équations de Hamilton.

A.A. Stanislavsky définit les nouvelles variables x_β et p_β , qui vont repéré le système subordonné, de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_\beta(t) &= \int_0^\infty p^S(t, \tau) x(\tau) d\tau \\ p_\beta(t) &= \int_0^\infty p^S(t, \tau) p(\tau) d\tau \end{cases} \quad (3.30)$$

Le Hamiltonien H étant autonome, il reste quant à lui inchangé dans cette transformation.

A.A. Stanislavsky formule de plus l'hypothèse suivante :

$$(\mathcal{H}) \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x}(x_\beta(t), p_\beta(t)) &= \int_0^\infty p^S(t, \tau) \frac{\partial H}{\partial x}(x(\tau), p(\tau)) d\tau \\ \frac{\partial H}{\partial p}(x_\beta(t), p_\beta(t)) &= \int_0^\infty p^S(t, \tau) \frac{\partial H}{\partial p}(x(\tau), p(\tau)) d\tau \end{cases} \quad (3.31)$$

On peut alors énoncer le résultat suivant :

Théorème 9 (Stanislavsky). — *Si l'hypothèse (\mathcal{H}) est vérifiée, alors la dynamique du système hamiltonien subordonné est donnée par les équations suivantes :*

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}_t^\beta x_\beta(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(x_\beta(t), p_\beta(t)) \\ {}^C\mathcal{D}_t^\beta p_\beta(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x_\beta(t), p_\beta(t)) \end{cases} \quad (3.32)$$

Démonstration. —

$$\begin{aligned} L\left[\frac{\partial H}{\partial p}(x_\beta(t), p_\beta(t))\right](s) &= \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial H}{\partial p}(x_\beta(t), p_\beta(t)) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^\infty p^S(t, \tau) \frac{\partial H}{\partial p}(x(\tau), p(\tau)) d\tau \right) dt \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-st} p^S(t, \tau) dt \right) \frac{\partial H}{\partial p}(x(\tau), p(\tau)) d\tau \\ &= \int_0^\infty s^{\beta-1} e^{-\tau s^\beta} \frac{\partial H}{\partial p}(x(\tau), p(\tau)) d\tau \\ &= s^{\beta-1} \int_0^\infty e^{-\tau s^\beta} \frac{dx}{d\tau}(\tau) d\tau \\ &= s^{2\beta-1} \int_0^\infty e^{-\tau s^\beta} x(\tau) d\tau + s^{\beta-1} \left[e^{-\tau s^\beta} x(\tau) \right]_{\tau=0}^{\tau=\infty} \\ &= s^{2\beta-1} L[x](s^\beta) - s^{\beta-1} x(0) \end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après le lemme 1,

$$L[{}^C\mathcal{D}_t^\beta x_\beta](s) = s^\beta L[x_\beta](s) - s^{\beta-1}x_\beta(0) \quad (3.33)$$

De plus,

$$\begin{aligned} L[x_\beta](s) &= \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^\infty p^S(t, \tau)x(\tau)d\tau \right) dt \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-st} p^S(t, \tau)dt \right) x(\tau)d\tau \\ &= \int_0^\infty s^{\beta-1} e^{-\tau s^\beta} x(\tau)d\tau \\ &= s^{\beta-1} L[x](s^\beta) \end{aligned}$$

On admet que $x_\beta(0) = x(0)$.

Dans ce cas, $L[\frac{\partial H}{\partial p}(x_\beta(t), p_\beta(t))](s) = L[{}^C\mathcal{D}_t^\beta x_\beta](s)$.

En prenant la transformée de Laplace inverse de cette équation, il vient finalement :

$$\frac{\partial H}{\partial p}(x_\beta(t), p_\beta(t)) = {}^C\mathcal{D}_t^\beta x_\beta(t) \quad (3.34)$$

La seconde relation se montre de la même manière. □

Ce théorème fait donc apparaître un lien fort entre temps aléatoire et dynamique fractionnaire. On peut alors avancer que le temps fractal, d'indice β , associé à la dynamique des systèmes chaotiques, peut conduire à des équations fractionnaires faisant intervenir des dérivées d'ordre β .

Notons que si rien ne semble imposé sur l'indice fractal, l'indice de la distribution stable doit quant à lui être strictement compris entre 0 et 1. Si le lien qui unit temps fractal et dérivée fractionnaire arrive à être solidifié, il sera alors possible de contraindre le modèle décrivant les pièges fractals, en imposant $0 < \beta < 1$, voire en déterminant la valeur de β .

Notons cependant que l'hypothèse (\mathcal{H}) semble a priori assez contraignante. La question sous-jacente est la suivante : les équations obtenues moyennant cette hypothèse ont-elles encore un contenu physique ?

Une réponse à ces deux problèmes peut être envisagée en utilisant un principe de moindre action fractionnaire. Sans utiliser l'hypothèse (\mathcal{H}), celui-ci peut permettre de retrouver les équations (3.32). Nous nous contentons d'employer le terme "envisagée", car nous sommes conscients qu'il semble toujours possible de s'interroger sur la signification et la validité du principe de moindre action, et de manière plus générale sur la réalité d'un modèle mathématique.

4. Compatibilité avec un principe de moindre action fractionnaire

Comme on l'a vu à travers les formules d'intégration par parties, les opérateurs fractionnaires passé et futur sont liés.

Afin de prendre en compte cette coexistence possible dans les équations fractionnaires, J. Cresson [2], qui utilise les dérivées de Riemann-Liouville, introduit l'opérateur suivant :

Définition 17. — Pour $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\mu \in \mathbb{C}$, on définit l'opérateur $\mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta}$ par :

$$\mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} = \frac{1}{2}({}_a\mathcal{D}_t^\alpha - {}_t\mathcal{D}_b^\beta) + \mu \frac{i}{2}({}_a\mathcal{D}_t^\alpha + {}_t\mathcal{D}_b^\beta) \quad (4.1)$$

Le paramètre μ n'a pas de sens physique, il permet simplement de se restreindre au passé ou au futur. Effectivement,

- si $\mu = -i$, $\mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} = {}_a\mathcal{D}_t^\alpha$,
- si $\mu = i$, $\mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} = -{}_t\mathcal{D}_b^\beta$.

Le théorème 7 de traduit alors de la manière suivante pour cet opérateur :

$$\int_a^b [\mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} f(t)] g(t) dt = - \int_a^b f(t) [\mathcal{D}_{-\mu}^{\beta,\alpha} g(t)] dt \quad (4.2)$$

Faisons de même pour les dérivées de Caputo ;

Définition 18. — Pour $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\mu \in \mathbb{C}$, on définit l'opérateur ${}^C\mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta}$ par :

$${}^C\mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} = \frac{1}{2}({}_a^C\mathcal{D}_t^\alpha - {}_t^C\mathcal{D}_b^\beta) + \mu \frac{i}{2}({}_a^C\mathcal{D}_t^\alpha + {}_t^C\mathcal{D}_b^\beta), \quad \mu \in \mathbb{C} \quad (4.3)$$

Le théorème 8 faisant intervenir des termes de bords, allégeons les notations en introduisant l'opérateur suivant :

Définition 19. — Soit $\mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} [.,.]_{t_1}^{t_2}$ l'opérateur défini par :

$$\mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} [f, g]_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{2}(1 + i\mu)g(t_2) {}_t_1\mathcal{D}_{t_2}^{-(1-\alpha)} f(t_2) - \frac{1}{2}(1 - i\mu)g(t_1) {}_t_1\mathcal{D}_{t_2}^{-(1-\beta)} f(t_1) \quad (4.4)$$

La formule d'intégration par parties prend alors la forme suivante pour l'opérateur ${}^C\mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta}$:

$$\int_a^b [{}^C\mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} f(t)] g(t) dt = - \int_a^b f(t) [{}^C\mathcal{D}_{-\mu}^{\beta,\alpha} g(t)] dt + \mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} [f, g]_a^b + \mathcal{D}_{-\mu}^{\beta,\alpha} [g, f]_a^b \quad (4.5)$$

Les développements suivants vont être basés sur ces opérateurs.

4.1. Plongement fractionnaire. — Dans ce paragraphe, le type de dérivée utilisé (Riemann-Liouville ou Caputo) n'intervient pas. Les résultats sont valables pour les deux types de dérivées. Les notations ${}_a\mathcal{D}_t^\alpha$ et ${}_t\mathcal{D}_b^\beta$ engloberont ici les dérivées de Riemann-Liouville et celles de Caputo.

L'obtention d'équations fractionnaires peut se faire de la manière suivante : partant des équations classiques, on remplace la dérivée temporelle par l'opérateur $\mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta}$. Cette démarche est cependant équivoque du fait des mauvaises propriétés des dérivées fractionnaires. Par exemple, si dans le cas classique, une équation différentielle d'ordre $k \geq 1$ peut-être ramenée à une équation d'ordre 1, il n'en va pas de même pour le cas fractionnaire, car ${}_a\mathcal{D}_t^\alpha {}_a\mathcal{D}_t^\beta \neq {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha+\beta}$.

Les équations classiques doivent donc pouvoir être écrites sous une "bonne forme", pour qu'il soit possible d'effectuer la substitution. J. Cresson [2] fixe un cadre précis pour ces équations. La transformation $\frac{d}{dt} \rightarrow \mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta}$ sur ces équations est alors qualifiée de *plongement fractionnaire*. Sans entrer dans les détails, nous nous contenterons de dire que l'équation

d'Euler-Lagrange $\frac{\partial L}{\partial v}(t, x, v) = \frac{\partial L}{\partial x}(t, x, v)$ est écrite sous cette "bonne forme". On peut alors effectuer un plongement fractionnaire ;

Théorème 10 (Plongement fractionnaire de l'équation d'Euler-Lagrange)

Soit $L(t, x, v)$ un Lagrangien admissible (ie différentiable). Le plongement fractionnaire de l'équation d'Euler-Lagrange est alors donné par :

$$\mathcal{D}_\mu^{\alpha, \beta} \left(\frac{\partial L}{\partial v}(t, x(t), \mathcal{D}_\mu^{\alpha, \beta} x(t)) \right) = \frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \mathcal{D}_\mu^{\alpha, \beta} x(t)) \quad (4.6)$$

Il n'en va cependant pas de même pour les équations de Hamilton ; il n'est pas possible de les plonger directement. Nous pouvons cependant suivre la même démarche que dans le cas classique, en définissant un système hamiltonien à partir d'un système lagrangien.

On considère un Lagrangien L autonome ($\frac{\partial L}{\partial t} = 0$), admissible, et qui satisfait la propriété de Legendre, c'est-à-dire tel que la fonction $v \mapsto \frac{\partial L}{\partial v}(x, v)$ est inversible pour tout x . Il existe alors une fonction f telle que $v = f(x, p)$.

Dans le cas classique, on définit alors le moment p par

$$p(t) = \frac{\partial L}{\partial v}(x(t), v(t)) \quad (4.7)$$

Le Hamiltonien H associé à L est alors défini par

$$H(x, p) = pf(x, p) - L(x, f(x, p)) \quad (4.8)$$

Dans le plongement fractionnaire de l'équation d'Euler-Lagrange, $\frac{\partial L}{\partial v}(x(t), v(t))$ est remplacé par $\frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \mathcal{D}_\mu^{\alpha, \beta} x(t))$; on est donc conduit à définir le moment fractionnaire (que l'on notera encore p) par :

$$p(t) = \frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \mathcal{D}_\mu^{\alpha, \beta} x(t)) \quad (4.9)$$

La fonction f vérifie à présent $\mathcal{D}_\mu^{\alpha, \beta} x = f(x, p)$.

Les équations de Hamilton associées à ce Hamiltonien sont alors données par le théorème suivant :

Théorème 11 (Plongement fractionnaires des équations de Hamilton)

Soit $L(x, v)$ un Lagrangien autonome admissible satisfaisant la propriété de Legendre. Soit p le moment fractionnaire défini par $p(t) = \frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \mathcal{D}_\mu^{\alpha, \beta} x(t))$; il existe une fonction f telle que $\mathcal{D}_\mu^{\alpha, \beta} x = f(x, p)$. Soit H le Hamiltonien défini par : $H(x, p) = pf(x, p) - L(x, f(x, p))$.

Alors H vérifie les équations suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_\mu^{\alpha, \beta} x(t) &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \mathcal{D}_\mu^{\alpha, \beta} p(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \quad (4.10)$$

Ces équations seront appelées plongement fractionnaire des équations de Hamilton.

Démonstration. — D'une part,

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p} &= \frac{\partial}{\partial p}(pf(x, p) - L(x, f(x, p))) \\ &= f(x, p) + p \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial L}{\partial v} \\ &= f(x, p) + p \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} p \\ &= f(x, p) = \mathcal{D}_\mu^{\alpha, \beta} x\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x} &= p \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial L}{\partial x} \\ &= \mathcal{D}_\mu^{\alpha, \beta} \frac{\partial L}{\partial v} = \mathcal{D}_\mu^{\alpha, \beta} p\end{aligned}$$

□

Remarquons qu'en se restreignant au cas particulier $\mathcal{D}_{-i}^{\beta, 0}$ et $a = 0$, les équations (4.10) sont similaires à celles de Stanislavsky (3.32) au niveau des opérateurs fractionnaires, ce qui justifie a posteriori la dénomination de *plongement* pour qualifier la démarche de cet auteur.

Précisons enfin que la procédure de plongement a pour avantage de pouvoir dissocier passé et futur, en choisissant respectivement $\mu = -i$ et $\mu = i$, ce qui peut sembler "rassurant" d'un point de vue physique.

Une question légitime est de savoir si le plongement fractionnaire se trouve être "la" bonne manière d'obtenir des équations fractionnaires. Nous allons effectivement présenter une autre méthode, qui ne fournit pas les mêmes équations dans le cas général. Comment savoir laquelle choisir? La seconde, basée sur un principe de moindre action, peut sembler plus légitime. Elle conduit cependant dans le cas général à des équations faisant apparaître de manière non dissociable les opérateurs passé et futur (le choix $\mu = -i$ ne conduit plus à des équations causales).

4.2. Principe de moindre action fractionnaire. —

4.2.1. Formalisme lagrangien. — Dans le cas classique, si $L(t, x, v)$ désigne le Lagrangien d'un système, on lui associe la fonctionnelle \mathcal{L} définie par

$$\begin{aligned}\mathcal{L} : C^1([a, b]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^b L(t, x(t), \frac{dx}{dt}(t)) dt\end{aligned}\tag{4.11}$$

L'équation d'Euler-Lagrange est obtenue lorsque cette fonctionnelle est extrémale. Dans toute la suite, on se restreint au cas où L est admissible. Dans ce cas, \mathcal{L} est différentiable; on obtient donc l'équation d'Euler-Lagrange en annulant la différentielle de \mathcal{L} .

On procède de même pour le cas fractionnaire ; on considère le même Lagrangien L que précédemment. Ce choix est motivé par le fait que le Lagrangien n'est qu'une fonction des coordonnées x et v ; les hypothèses faites sur celles-ci (comme par exemple supposer que $\mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} x(t) = v(t)$) ne changent pas la forme de L .

Considérons d'abord le cas des dérivées de Riemann-Liouville.

La fonctionnelle fractionnaire associée (que l'on notera toujours \mathcal{L}) est à présent définie comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \quad {}^\alpha E_b^\beta &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^b L(t, x(t), \mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} x(t)) dt \end{aligned} \quad (4.12)$$

Calculons sa différentielle ;

Soit $x \in {}^\alpha E_b^\beta$, $h \in \text{Var}(a, b)$ et $\varepsilon > 0$;

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x + \varepsilon h) &= \int_a^b L(t, x(t) + \varepsilon h(t), \mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} x(t) + \varepsilon \mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} h(t)) dt \\ &= \mathcal{L}(x) + \varepsilon \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} x(t)) h(t) dt \\ &\quad + \varepsilon \int_a^b \frac{\partial L}{\partial v}(t, x(t), \mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} x(t)) \mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} h(t) dt + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

On utilise à présent la relation (4.2) :

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial v}(t, x(t), \mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} x(t)) \mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} h(t) dt = - \int_a^b \mathcal{D}_{-\mu}^{\beta,\alpha} \frac{\partial L}{\partial v}(t, x(t), \mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} x(t)) h(t) dt \quad (4.13)$$

La différentielle de \mathcal{L} en x est donc donnée par :

$$d\mathcal{L}(x, h) = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} x(t)) - \mathcal{D}_{-\mu}^{\beta,\alpha} \frac{\partial L}{\partial v}(t, x(t), \mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} x(t)) \right] h(t) dt \quad (4.14)$$

Comme nous allons le voir par la suite, l'espace des variations conditionne la forme de la différentielle. Nous précisons donc la notion d'extremum pour \mathcal{L} :

Définition 20. — Soit $\mathbb{P} \subset {}^\alpha E_b^\beta$, $x \in {}^\alpha E_b^\beta$. Alors x est dite \mathbb{P} -extremale pour \mathcal{L} si pour tout $h \in \mathbb{P}$, $d\mathcal{L}(x, h) = 0$.

Nous pouvons à présent énoncer le théorème suivant :

Théorème 12 (Équation d'Euler-Lagrange fractionnaire). — Soit L un Lagrangien admissible, \mathcal{L} la fonctionnelle fractionnaire associée. Soit $x \in {}^\alpha E_b^\beta$.

Alors x est ${}^\alpha E_b^\beta$ -extremale pour \mathcal{L} si et seulement si x vérifie l'équation d'Euler-Lagrange fractionnaire suivante :

$$\mathcal{D}_{-\mu}^{\beta,\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial v}(t, x(t), \mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} x(t)) \right) = \frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} x(t)) \quad (4.15)$$

Démonstration. — Si l'équation (4.15) est vérifiée, alors bien sûr $d\mathcal{L}(x, h) = 0$ pour tout $h \in {}^\alpha E_b^\beta$. Réciproquement, on considère le cas

$$h(t) = \left[\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} x(t)) - \mathcal{D}_{-\mu}^{\beta,\alpha} \frac{\partial L}{\partial v}(t, x(t), \mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} x(t)) \right] \quad (4.16)$$

On a alors

$$0 = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \mathcal{D}_\mu^{\alpha, \beta} x(t)) - \mathcal{D}_{-\mu}^{\beta, \alpha} \frac{\partial L}{\partial v}(t, x(t), \mathcal{D}_\mu^{\alpha, \beta} x(t)) \right]^2 dt \quad (4.17)$$

On conclut que

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \mathcal{D}_\mu^{\alpha, \beta} x(t)) - \mathcal{D}_{-\mu}^{\beta, \alpha} \frac{\partial L}{\partial v}(t, x(t), \mathcal{D}_\mu^{\alpha, \beta} x(t)) = 0 \quad (4.18)$$

□

Cette équation détermine entièrement la dynamique d'un système lagrangien fractionnaire.

Étendons à présent les résultats de J. Cresson pour les dérivées de Caputo.

Les dérivées de Caputo font apparaître des termes supplémentaires dans la formule d'intégration par parties. Comme dans le cas classique, on restreint l'espace des variations en imposant des conditions nulles aux bords.

On introduit donc l'espace des variations suivant ;

Définition 21. — Soit ${}^C Var(a, b)$ l'ensemble défini par :

$${}^C Var(a, b) = \{ h \in {}^\alpha \tilde{E}_b^\beta, \quad h(a) = h(b) = 0, \quad {}_a \mathcal{D}_b^{-(1-\alpha)} h(a) = {}_a \mathcal{D}_b^{-(1-\alpha)} h(b) = 0, \quad (4.19)$$

$${}_a \mathcal{D}_b^{-(1-\beta)} h(a) = {}_a \mathcal{D}_b^{-(1-\beta)} h(b) = 0 \}$$

Dès lors,

$$\forall f \in {}^\alpha \tilde{E}_b^\beta, \quad \forall h \in {}^C Var(a, b), \quad {}_\mu^{\alpha, \beta} [f, h]_a^b = {}_{-\mu}^{\beta, \alpha} [h, f]_a^b = 0 \quad (4.20)$$

L'extremale de la fonctionnelle \mathcal{L} reste donc donnée par :

$$d\mathcal{L}(x, h) = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), {}^C \mathcal{D}_\mu^{\alpha, \beta} x(t)) - {}^C \mathcal{D}_{-\mu}^{\beta, \alpha} \frac{\partial L}{\partial v}(t, x(t), {}^C \mathcal{D}_\mu^{\alpha, \beta} x(t)) \right] h(t) dt \quad (4.21)$$

Cette restriction sur les variations n'a en fait pas d'influence sur la solution. Pour le voir, introduisons le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt \quad (4.22)$$

Notons $\|\cdot\|$ sa norme associée : $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$.

On peut alors énoncer le lemme suivant :

Lemme 2. — Soit $\mathbb{P} \subset {}^\alpha \tilde{E}_b^\beta$. Notons $\bar{\mathbb{P}}$ son adhérence. Soit $x \in {}^\alpha \tilde{E}_b^\beta$. Alors :
 x est \mathbb{P} -extremale pour \mathcal{L} si et seulement si x est $\bar{\mathbb{P}}$ -extremale pour \mathcal{L} .

Démonstration. — Ceci est simplement dû au fait que $\mathbb{P}^\perp = \bar{\mathbb{P}}^\perp$. Effectivement,

$$\begin{aligned} x \text{ } \mathbb{P}\text{-extremale pour } \mathcal{L} &\Leftrightarrow \forall h \in \mathbb{P}, \quad d\mathcal{L}(x, h) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall h \in \mathbb{P}, \quad \langle \frac{\partial L}{\partial x} - \mathcal{D}_{-\mu}^{\beta, \alpha} \frac{\partial L}{\partial v}, h \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \mathcal{D}_{-\mu}^{\beta, \alpha} \frac{\partial L}{\partial v} \right) \in \mathbb{P}^\perp \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \mathcal{D}_{-\mu}^{\beta, \alpha} \frac{\partial L}{\partial v} \right) \in \bar{\mathbb{P}}^\perp \\ &\Leftrightarrow \forall h \in \bar{\mathbb{P}}, \quad \langle \frac{\partial L}{\partial x} - \mathcal{D}_{-\mu}^{\beta, \alpha} \frac{\partial L}{\partial v}, h \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall h \in \bar{\mathbb{P}}, \quad d\mathcal{L}(x, h) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \text{ } \bar{\mathbb{P}}\text{-extremale pour } \mathcal{L} \end{aligned} \quad (4.23)$$

□

On peut montrer que $\overline{CVar(a, b)} = {}^{\alpha}\tilde{E}_b^{\beta}$. Par conséquent, x est $CVar(a, b)$ -extremale pour \mathcal{L} si et seulement si x est ${}^{\alpha}\tilde{E}_b^{\beta}$ -extremale pour \mathcal{L} .

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 13. — *Soit $x \in {}^{\alpha}\tilde{E}_b^{\beta}$. Alors x est ${}^{\alpha}\tilde{E}_b^{\beta}$ -extremale pour \mathcal{L} si et seulement si x vérifie l'équation d'Euler-Lagrange fractionnaire suivante :*

$${}^C\mathcal{D}_{-\mu}^{\beta, \alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial v}(t, x(t), {}^C\mathcal{D}_{\mu}^{\alpha, \beta} x(t)) \right) = \frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), {}^C\mathcal{D}_{\mu}^{\alpha, \beta} x(t)) \quad (4.24)$$

Ces résultats sur les systèmes lagrangiens vont nous permettre d'en déduire la forme des systèmes hamiltoniens associés.

4.2.2. Formalisme hamiltonien. — Les équations d'Euler-Lagrange (4.15) et (4.24) étant identiques pour les dérivées de Riemann-Liouville et de Caputo, ce paragraphe s'applique directement à ces deux définitions. Les notations ${}_a\mathcal{D}_t^{\alpha}$ et ${}_t\mathcal{D}_b^{\beta}$ engloberont ici les dérivées de Riemann-Liouville et celles de Caputo.

Comme pour le plongement fractionnaire, on considère un Lagrangien L autonome ($\frac{\partial L}{\partial t} = 0$), admissible, satisfaisant la propriété de Legendre.

Le moment fractionnaire est encore défini par :

$$p(t) = \frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \mathcal{D}_{\mu}^{\alpha, \beta} x(t)) \quad (4.25)$$

et le Hamiltonien H associé à L est défini par :

$$H(x, p) = pf(x, p) - L(x, f(x, p)) \quad (4.26)$$

De l'équation d'Euler-Lagrange fractionnaire (4.15), on déduit alors les équations de Hamilton :

Théorème 14 (Équations de Hamilton fractionnaires). — *La fonction $x(t)$ est solution de l'équation d'Euler-Lagrange fractionnaire (4.15) si et seulement si*

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{\mu}^{\alpha, \beta} x(t) &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \mathcal{D}_{-\mu}^{\beta, \alpha} p(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \quad (4.27)$$

Démonstration. — L'égalité $\mathcal{D}_{\mu}^{\alpha, \beta} x(t) = \frac{\partial H}{\partial p}$ s'obtient de la même manière que pour le plongement fractionnaire.

Pour la seconde équation,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= p \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial L}{\partial x} \end{aligned}$$

Or, x est solution de (4.15) si et seulement si $\frac{\partial L}{\partial x} = \mathcal{D}_{-\mu}^{\beta, \alpha} \frac{\partial L}{\partial v}$. Ainsi, x est solution de (4.15) si et seulement si $\frac{\partial H}{\partial x} = -\mathcal{D}_{-\mu}^{\beta, \alpha} \frac{\partial L}{\partial v} = -\mathcal{D}_{-\mu}^{\beta, \alpha} p(t)$.

□

Nous pouvons alors donner la définition d'un système hamiltonien fractionnaire :

Définition 22 (Système hamiltonien fractionnaire). — *Un système Hamiltonien fractionnaire est défini par un Hamiltonien $H(x, p)$ et par les équations fractionnaires associées :*

$$\begin{cases} \mathcal{D}_\mu^{\alpha, \beta} x(t) &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \mathcal{D}_{-\mu}^{\beta, \alpha} p(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \quad (4.28)$$

À cause de la présence simultanée des opérateurs $\mathcal{D}_\mu^{\alpha, \beta}$ et $\mathcal{D}_{-\mu}^{\beta, \alpha}$ dans les équations, celles-ci contiendront des opérateurs passé et futur quelque soit la valeur de μ , ce qui peut sembler problématique pour nombre de modèles. Le principe de moindre action, pourtant très puissant dans le cas classique, perdrait-il donc tout son sens avec le formalisme fractionnaire? Une alternative nous semble possible.

4.3. Restriction causale. — Nous venons de voir que le principe de moindre action fractionnaire liait le passé et le futur. Vouloir une équation causale revient à imposer des contraintes sur la procédure conduisant à la solution, c'est-à-dire sur le principe variationnel. Cette exigence conduit donc à restreindre l'espace des variations.

Dans le cas des dérivées de Riemann-Liouville, nous sommes ainsi amenés à introduire l'espace suivant :

Définition 23. — *L'espace restreint des variations relatif aux dérivées de Riemann-Liouville, noté $Var^{\alpha, \beta}(a, b)$, est défini par :*

$$Var^{\alpha, \beta}(a, b) = \left\{ h \in {}^\alpha E_b^\beta, {}_a \mathcal{D}_t^\alpha h = -{}_t \mathcal{D}_b^\alpha h, {}_a \mathcal{D}_t^\beta h = -{}_t \mathcal{D}_b^\beta h \right\} \quad (4.29)$$

Si $h \in Var^{\alpha, \beta}(a, b)$, alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu^{\alpha, \beta} h &= \frac{1}{2}({}_a \mathcal{D}_t^\alpha h - {}_t \mathcal{D}_b^\beta h) + \mu \frac{i}{2}({}_a \mathcal{D}_t^\alpha h + {}_t \mathcal{D}_b^\beta h) \\ &= \frac{1}{2}(-{}_t \mathcal{D}_b^\alpha h + {}_a \mathcal{D}_t^\beta h) + \mu \frac{i}{2}(-{}_t \mathcal{D}_b^\alpha h - {}_a \mathcal{D}_t^\beta h) \\ &= \frac{1}{2}({}_a \mathcal{D}_t^\beta h - {}_t \mathcal{D}_b^\alpha h) - \mu \frac{i}{2}({}_a \mathcal{D}_t^\beta h + {}_t \mathcal{D}_b^\alpha h) \\ &= \mathcal{D}_{-\mu}^{\beta, \alpha} h \end{aligned}$$

Afin d'avoir une vision claire des modifications induites par ces contraintes, introduisons tout d'abord l'opérateur $\mathcal{A}_\mu^{\alpha, \beta} = \mathcal{D}_\mu^{\alpha, \beta} - \mathcal{D}_{-\mu}^{\beta, \alpha}$.

Nous avons alors $Var^{\alpha, \beta}(a, b) = Ker \mathcal{A}_\mu^{\alpha, \beta}$.

Cet opérateur est auto-adjoint pour le produit scalaire défini plus haut. Effectivement,

$$\begin{aligned}
\forall f, g \in {}^{\alpha}E_b^{\beta}, \quad \langle \mathcal{A}_{\mu}^{\alpha, \beta} \cdot f, g \rangle &= \int_a^b \mathcal{D}_{\mu}^{\alpha, \beta} f(t) g(t) dt - \int_a^b \mathcal{D}_{-\mu}^{\beta, \alpha} f(t) g(t) dt \\
&= - \int_a^b f(t) \mathcal{D}_{-\mu}^{\beta, \alpha} g(t) dt + \int_a^b f(t) \mathcal{D}_{\mu}^{\alpha, \beta} g(t) dt \\
&= \int_a^b f(t) \left(\mathcal{A}_{\mu}^{\alpha, \beta} \cdot g \right) (t) dt \\
&= \langle f, \mathcal{A}_{\mu}^{\alpha, \beta} \cdot g \rangle
\end{aligned}$$

Nous avons donc notamment $\mathcal{I}m \mathcal{A}_{\mu}^{\alpha, \beta} = (\mathcal{K}er \mathcal{A}_{\mu}^{\alpha, \beta})^{\perp}$.

En se restreignant à l'espace des variations $Var^{\alpha, \beta}(a, b)$, le critère d'extremalité pour \mathcal{L} se traduit donc de la manière suivante :

Théorème 15. — *Soit L un Lagrangien admissible, \mathcal{L} la fonctionnelle fractionnaire associée. Soit $x \in {}^{\alpha}E_b^{\beta}$.*

Alors x est $Var^{\alpha, \beta}(a, b)$ -extremale pour \mathcal{L} si et seulement s'il existe $g \in {}^{\alpha}E_b^{\beta}$ tel que

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \mathcal{D}_{-\mu}^{\beta, \alpha} \frac{\partial L}{\partial v} = \mathcal{A}_{\mu}^{\alpha, \beta} g \quad (4.30)$$

Démonstration. — x est $Var^{\alpha, \beta}(a, b)$ -extremale pour \mathcal{L} si et seulement si pour tout $h \in Var^{\alpha, \beta}(a, b)$, $d\mathcal{L}(x, h) = 0$.

Comme $d\mathcal{L}(x, h) = \langle \frac{\partial L}{\partial x} - \mathcal{D}_{-\mu}^{\beta, \alpha} \frac{\partial L}{\partial v}, h \rangle$, ceci équivaut à $\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \mathcal{D}_{-\mu}^{\beta, \alpha} \frac{\partial L}{\partial v} \right) \in (\mathcal{K}er \mathcal{A}_{\mu}^{\alpha, \beta})^{\perp}$.

On conclut en utilisant l'égalité $\mathcal{I}m \mathcal{A}_{\mu}^{\alpha, \beta} = (\mathcal{K}er \mathcal{A}_{\mu}^{\alpha, \beta})^{\perp}$. \square

Nous n'avons donc pas unicité de la solution ; il faut imposer une condition supplémentaire (choisir g) afin de caractériser entièrement une solution.

Par exemple, le choix le "plus simple" consistant à prendre $g = 0$ redonne l'équation (4.15) ; la solution du cas général est une solution du problème restreint (fort heureusement d'ailleurs).

Le point important est que nous pouvons aussi choisir $g = \frac{\partial L}{\partial v}$; l'équation d'Euler-Lagrange devient dans ce cas :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \mathcal{D}_{\mu}^{\alpha, \beta} x(t)) = \mathcal{D}_{\mu}^{\alpha, \beta} \frac{\partial L}{\partial v}(t, x(t), \mathcal{D}_{\mu}^{\alpha, \beta} x(t)) \quad (4.31)$$

L'opérateur $\mathcal{D}_{-\mu}^{\beta, \alpha}$ n'apparaît plus, nous avons ainsi découplé le passé et le futur :

– avec $\mu = i$, l'équation d'Euler-Lagrange devient :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), -{}_t\mathcal{D}_b^{\beta} x(t)) = -{}_t\mathcal{D}_b^{\beta} \frac{\partial L}{\partial v}(t, x(t), -{}_t\mathcal{D}_b^{\beta} x(t)) \quad (4.32)$$

– avec $\mu = -i$, elle s'écrit :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha} x(t)) = {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha} \frac{\partial L}{\partial v}(t, x(t), {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha} x(t)) \quad (4.33)$$

On fait de même pour les dérivées de Caputo. L'espace des variations est similaire :

Définition 24. — L'espace restreint des variations relatif aux dérivées de Caputo, noté ${}^CVar^{\alpha,\beta}(a,b)$, est défini par :

$${}^CVar^{\alpha,\beta}(a,b) = \{h \in {}^CVar(a,b), {}^C\mathcal{D}_t^\alpha h = -{}^C\mathcal{D}_b^\alpha h, {}^C\mathcal{D}_t^\beta h = -{}^C\mathcal{D}_b^\beta h\} \quad (4.34)$$

En posant ${}^C\mathcal{A}_\mu^{\alpha,\beta} = {}^C\mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} - {}^C\mathcal{D}_{-\mu}^{\beta,\alpha}$, nous avons encore ${}^CVar^{\alpha,\beta}(a,b) = {}^CVar(a,b) \cap \text{Ker } {}^C\mathcal{A}_\mu^{\alpha,\beta}$.

Le principe de moindre action conduit au même résultat :

Théorème 16. — Soit $x \in {}^\alpha\tilde{E}_b^\beta$. Alors x est ${}^CVar^{\alpha,\beta}(a,b)$ -extremale pour \mathcal{L} si et seulement s'il existe $g \in {}^\alpha\tilde{E}_b^\beta$ tel que :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), {}^C\mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} x(t)) - {}^C\mathcal{D}_{-\mu}^{\beta,\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial v}(t, x(t), {}^C\mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} x(t)) \right) = {}^C\mathcal{A}_\mu^{\alpha,\beta} g \quad (4.35)$$

La signification de ${}^CVar^{\alpha,\beta}(a,b)$ (ou de ${}^CVar^{\alpha,\beta}(a,b)$) et de g reste certes obscure. Cependant, ce résultat nous paraît intéressant pour deux raisons :

- il est possible d'obtenir des solutions causales via un principe de moindre action; ce dernier semble ainsi rester valide dans le cadre fractionnaire,
- les solutions causales obtenues sont identiques à celles obtenues par plongement fractionnaire; dans le cas où l'on sait a priori que l'on veut obtenir une équation causale, les deux méthodes sont équivalentes. Le choix cornélien quant à savoir quelle démarche privilégier disparaît de lui-même : l'équation trouvée est causale tout en vérifiant un principe de moindre action.

Étudions maintenant ce qu'il en est pour le formalisme hamiltonien. Comme précédemment, les résultats sont les mêmes pour les dérivées de Riemann-Liouville. On ne les distingue donc pas ici.

Théorème 17. — Soit L un Lagrangien autonome admissible satisfaisant la propriété de Legendre, \mathcal{L} la fonctionnelle fractionnaire associée.

Soit $x \in {}^\alpha E_b^\beta$ et $p(t) = \frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} x(t))$ le moment fractionnaire associé.

Alors x est ${}^CVar^{\alpha,\beta}(a,b)$ -extremale pour \mathcal{L} si et seulement s'il existe $g \in {}^\alpha E_b^\beta$ tel que :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} x(t) &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \mathcal{D}_{-\mu}^{\beta,\alpha} p(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x} - \mathcal{A}_\mu^{\alpha,\beta} g \end{cases} \quad (4.36)$$

Démonstration. — L'égalité $\mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} x(t) = \frac{\partial H}{\partial p}$ s'obtient de la même manière que précédemment.

$$\frac{\partial H}{\partial x} = p \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} \quad (4.37)$$

Or, x est ${}^CVar^{\alpha,\beta}(a,b)$ -extremale pour \mathcal{L} si et seulement s'il existe $g \in {}^\alpha E_b^\beta$ tel que $\frac{\partial L}{\partial x} - \mathcal{D}_{-\mu}^{\beta,\alpha} \frac{\partial L}{\partial v} = \mathcal{A}_\mu^{\alpha,\beta} g$.

Ainsi, x ${}^CVar^{\alpha,\beta}(a,b)$ -extremale pour \mathcal{L} si et seulement si $\frac{\partial H}{\partial x} = -\mathcal{D}_{-\mu}^{\beta,\alpha} \frac{\partial L}{\partial v} - \mathcal{A}_\mu^{\alpha,\beta} g = -\mathcal{D}_{-\mu}^{\beta,\alpha} p(t) - \mathcal{A}_\mu^{\alpha,\beta} g$.

□

En choisissant $g = p$, les équations de Hamilton deviennent :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} x(t) &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} p(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \quad (4.38)$$

On peut là encore obtenir des équations causales en choisissant $\mu = -i$.

Enfin, en le cas particulier $\mathcal{D}_{-i}^{\beta,0}$ avec $a = 0$ conduit comme pour le plongement fractionnaire aux équations obtenues par A.A. Stanislavsky.

4.4. Cohérence avec le formalisme de A.A. Stanislavsky. — L'équation (4.38) montre que le formalisme de A.A. Stanislavsky est compatible avec un principe de moindre action. L'avantage de cette seconde méthode est qu'elle ne suppose pas l'hypothèse (\mathcal{H}) (3.31).

Pour s'en convaincre, utilisons l'hypothèse d'un temps interne $S(t)$, mais repartons d'un système lagrangien principal, repéré par $x(t)$ et $v(t)$. Le système subordonné est alors décrit par $x_\beta(t)$ et $v_\beta(t)$, définis de la même manière que précédemment :

$$\begin{cases} x_\beta(t) &= \int_0^\infty p^S(t, \tau) x(\tau) d\tau \\ v_\beta(t) &= \int_0^\infty p^S(t, \tau) v(\tau) d\tau \end{cases} \quad (4.39)$$

De la même façon que l'on a obtenu la relation $\frac{\partial H}{\partial p}(x_\beta(t), p_\beta(t)) = {}^C_0\mathcal{D}_t^\beta x_\beta(t)$, on montre que $v_\beta(t) = {}^C_0\mathcal{D}_t^\beta x_\beta(t)$. On a ainsi $v_\beta(t) = \mathcal{D}_{-i}^{\beta,0} x_\beta(t)$, avec $a = 0$.

On applique alors le théorème (17) ; le moment p est défini par $p(t) = \frac{\partial L}{\partial v}(x_\beta(t), v_\beta(t))$. Nous choisissons ensuite $g = p$ et aboutissons aux équations de Hamilton suivantes :

$$\begin{cases} {}^C_0\mathcal{D}_t^\beta x_\beta(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(x_\beta(t), p(t)) \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\beta p(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x_\beta(t), p(t)) \end{cases} \quad (4.40)$$

Nous remarquons que le moment p n'est pas défini de la même manière que p_β . Les deux quantités obéissent cependant aux mêmes équations ; il devient alors possible de les identifier.

Les équations (4.40) sont similaires aux équations (3.32), mais en étant issues d'un principe de moindre action, elles ne supposent plus l'hypothèse (\mathcal{H}) (3.31).

Ces équations fractionnaires obtenues, essayons à présent de voir ce quelles propriétés il possible d'en tirer.

PARTIE III

PROPRIÉTÉS DES SYSTÈMES HAMILTONIENS ET LAGRANGIENS FRACTIONNAIRES

Il semble légitime de se demander si les équations précédentes sont exploitables en pratique. Quelles propriétés des systèmes classiques s'étendent au cas fractionnaire? Comme nous l'avons déjà mentionné, les dérivées fractionnaires sont difficilement manipulables, car elles ne vérifient pas la majorité des propriétés des dérivées usuelles. La première question est assurément de savoir si ces équations peuvent être résolues analytiquement. Une ébauche de réponse a déjà été donnée avec le lien qui unissait dérivée de Caputo à gauche et transformée de Laplace (lemme 1). Précisons que le lien existe aussi avec la dérivée de Riemann-Liouville; la différence est que les dérivées d'ordres entiers évaluées à l'instant initial sont remplacées par des dérivées d'ordres non-entiers. La difficulté d'interprétation des ces dernières est une des raisons pour laquelle les dérivées de Caputo sont souvent privilégiées pour des modélisations. Par contre, pour les dérivées à droite, ce lien est brisé. Les équations où les opérateurs passé et futur interviennent simultanément ne peuvent être résolues par transformée de Laplace.

Nous allons donner une illustration de cette méthode de résolution par transformée de Laplace avec l'exemple de l'oscillateur harmonique fractionnaire causal.

Une deuxième question naturelle concerne les intégrales premières; dans le cas classique, celles-ci jouent un rôle fondamental dans la résolution des équations, et dans l'étude du comportement des systèmes dynamiques. Ces quantités subsistent-elles dans le cas fractionnaire? Cette question semble délicate. Nous nous contenterons de présenter quelques pistes concernant ce point.

5. Résolution d'équations différentielles fractionnaires : l'oscillateur harmonique

L'étude de l'oscillateur fractionnaire va nous permettre de découvrir deux propriétés qui apparaissent avec le formalisme fractionnaire :

- le caractère intrinsèquement dissipatif de la dérivée fractionnaire,
- le lien entre le nombre de conditions initiales et la composition de dérivées fractionnaires.

5.1. Cadre d'étude. — Dans le cas classique, le cadre souvent le plus adapté pour décrire l'oscillateur est le formalisme hamiltonien. faisons de même pour le cas fractionnaire; on considère le système hamiltonien fractionnaire de Hamiltonien $H = \frac{1}{2}p^2 + w^2q^2$ et d'équations associées :

$$\begin{cases} {}_0^C \mathcal{D}_t^\beta x(t) &= \frac{\partial H}{\partial p} = p(t) \\ {}_0^C \mathcal{D}_t^\beta p(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -w^2 x(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

avec $0 < \beta < 1$.

Ces équations sont équivalentes au système suivant :

$$\begin{cases} {}_0^C \mathcal{D}_t^\beta {}_0^C \mathcal{D}_t^\beta x(t) + w^2 x(t) = 0 \\ {}_0^C \mathcal{D}_t^\beta {}_0^C \mathcal{D}_t^\beta p(t) + w^2 p(t) = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

À titre de comparaison, introduisons aussi le système suivant :

$$\begin{cases} {}_0^C \mathcal{D}_t^{2\beta} x(t) + w^2 x(t) = 0 \\ {}_0^C \mathcal{D}_t^{2\beta} p(t) + w^2 p(t) = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Il pourrait être vu comme une sorte de "plongement" de l'équation classique

$$\frac{d^2 x}{dt^2}(t) + w^2 x(t) = 0 \quad (5.4)$$

(qui implique aussi $\frac{d^2 p}{dt^2}(t) + w^2 p(t) = 0$, où $p = m \frac{dx}{dt}$).

Nous allons voir que ces systèmes ne conduisent pas aux mêmes solutions.

5.2. Résolution des équations. — L'équation (5.2) fait apparaître une conjugaison de dérivées fractionnaires. Avant de pouvoir appliquer le lemme 1, il convient d'exprimer l'opérateur ${}_0^C \mathcal{D}_t^\beta {}_0^C \mathcal{D}_t^\beta$ sous une autre forme. Nous avons pour cela le lemme suivant :

Lemme 3. — *Soit $0 \leq \beta < 1$. Alors :*

- si $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$, ${}_a^C \mathcal{D}_t^\alpha {}_a^C \mathcal{D}_t^\alpha f(t) = {}_a^C \mathcal{D}_t^{2\beta} f(t)$,
- si $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$, ${}_a^C \mathcal{D}_t^\alpha {}_a^C \mathcal{D}_t^\alpha f(t) = {}_a^C \mathcal{D}_t^{2\beta} f(t) + f'(a) \frac{(t-a)^{1-2\beta}}{\Gamma(2-2\beta)}$.

Démonstration. —

$$\begin{aligned} {}_a^C \mathcal{D}_t^\alpha {}_a^C \mathcal{D}_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)^2} \int_a^t (t-\tau)^{-\beta} \frac{d}{d\tau} \left[\int_a^\tau (\tau-u)^{-\beta} f'(u) du \right] d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)^2} \int_a^t (t-\tau)^{-\beta} \left[(\tau-a)^{-\beta} f'(a) + \int_a^\tau (\tau-u)^{-\beta} f''(u) du \right] d\tau \\ &= \frac{f'(a)}{\Gamma(1-\beta)^2} \int_a^t (t-\tau)^{-\beta} (\tau-a)^{-\beta} d\tau \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(1-\beta)^2} \int_a^t (t-\tau)^{-\beta} \left(\int_a^\tau (\tau-u)^{-\beta} f''(u) du \right) d\tau \end{aligned}$$

Étudions chaque terme séparément.

Le premier fait apparaître la fonction \mathfrak{B} définie par :

$$\mathfrak{B}(x, y) = \int_0^1 (1-u)^{x-1} u^{y-1} du = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (5.5)$$

Effectivement, en utilisant le changement de variables $u = \frac{t-\tau}{t-a}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{f'(a)}{\Gamma(1-\beta)^2} \int_a^t (t-\tau)^{-\beta} (\tau-a)^{-\beta} d\tau &= \frac{f'(a)}{\Gamma(1-\beta)^2} (t-a)^{1-2\beta} \int_0^1 u^{-\beta} (1-u)^{-\beta} du \\ &= \frac{f'(a)}{\Gamma(1-\beta)^2} (t-a)^{1-2\beta} \mathfrak{B}(1-\beta, 1-\beta) \\ &= \frac{f'(a)}{\Gamma(1-\beta)^2} (t-a)^{1-2\beta} \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)} \\ &= f'(a) \frac{(t-a)^{1-2\beta}}{\Gamma(2-2\beta)} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Il en va de même pour le second terme, moyennant l'interversion des deux intégrales ;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(1-\beta)^2} \int_a^t (t-\tau)^{-\beta} \int_a^\tau (\tau-u)^{-\beta} f''(u) du d\tau &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)^2} \int_a^t \int_a^\tau (t-\tau)^{-\beta} (\tau-u)^{-\beta} f''(u) dud\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)^2} \int_a^t \int_u^t (t-\tau)^{-\beta} (\tau-u)^{-\beta} f''(u) d\tau du \\
&= \int_a^t \left(\frac{1}{\Gamma(1-\beta)^2} \int_u^t (t-\tau)^{-\beta} (\tau-u)^{-\beta} d\tau \right) f''(u) du \\
&= \int_a^t \frac{(t-u)^{1-2\beta}}{\Gamma(1-\beta)^2} \mathfrak{B}(1-\beta, 1-\beta) f''(u) du \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-2\beta)} \int_a^t (t-u)^{1-2\beta} f''(u) du
\end{aligned}$$

Deux cas sont alors à considérer :

- Si $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$,

$$\frac{1}{\Gamma(2-2\beta)} \int_a^t (t-u)^{1-2\beta} f''(u) du = {}_a^C \mathcal{D}_t^{2\beta} f(t), \text{ car } 1 \leq 2\beta < 2. \quad (5.7)$$

- Si $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}
\int_a^t \frac{(t-u)^{1-2\beta}}{\Gamma(2-2\beta)} f''(u) du &= \int_a^t \frac{(t-u)^{-2\beta}}{\Gamma(1-2\beta)} f'(u) du + \left[\frac{(t-u)^{1-2\beta}}{\Gamma(2-2\beta)} f'(u) \right]_a^b \\
&= {}_a^C \mathcal{D}_t^{2\beta} f(t) - \frac{(t-a)^{1-2\beta}}{\Gamma(2-2\beta)} f'(a), \text{ car } 0 \leq 2\beta < 1.
\end{aligned}$$

Ce terme supplémentaire est l'opposé de l'expression (5.6). □

Les lemmes 1 et 3 permettent alors d'énoncer le suivant :

Lemme 4. — Soit $0 \leq \beta < 1$. Alors :

$$L[{}_a^C \mathcal{D}_t^\alpha {}_a^C \mathcal{D}_t^\alpha f](s) = s^{2\beta} L[f](s) - e^{-as} s^{2\beta-1} f(a) \quad (5.8)$$

Démonstration. — - Si $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
L[{}_a^C \mathcal{D}_t^\alpha {}_a^C \mathcal{D}_t^\alpha f](s) &= L[{}_a^C \mathcal{D}_t^{2\beta} f](s) \\
&= s^{2\beta} L[f](s) - e^{-as} s^{2\beta-1} f(a), \text{ car } 0 \leq 2\beta < 1
\end{aligned}$$

- Si $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$,

$$\begin{aligned}
L[{}_a^C \mathcal{D}_t^\alpha {}_a^C \mathcal{D}_t^\alpha f](s) &= L[{}_a^C \mathcal{D}_t^{2\beta} f](s) + L\left[f'(a) \frac{(t-a)^{1-2\beta}}{\Gamma(2-2\beta)}\right] \\
&= s^{2\beta} L[f](s) - e^{-as} \left(s^{2\beta-1} f(a) + s^{2\beta-2} f'(a) \right) + e^{-as} s^{2\beta-2} f'(a) \\
&= s^{2\beta} L[f](s) - e^{-as} s^{2\beta-1} f(a)
\end{aligned}$$

□

Nous pouvons à présent résoudre les équations (5.2) et (5.3) grâce à la transformée de Laplace.

On rappelle que $L\left[\frac{t^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)}\right] = \frac{1}{s^{1+\gamma}}$.

La transformée de Laplace de l'équation (5.2) en x s'exprime comme :

$$s^{2\beta}X(s) - s^{2\beta-1}x(0) + w^2X(s) = 0, \quad \text{où } X(s) = L[x](s) \quad (5.9)$$

Ainsi, $X(s) = x(0)\frac{s^{2\beta-1}}{s^{2\beta}+w^2}$.

Prenons-en maintenant sa transformée inverse.

Pour ce faire, on introduit une fonction qui semble jouer un rôle important dans le calcul fractionnaire :

Définition 25 (Fonction de Mittag-Leffler). — Soit $\mu, \nu > 0$. La fonction de Mittag-Leffler, notée $E_{\mu,\nu}$ est définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, E_{\mu,\nu}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\mu k + \nu)} \quad (5.10)$$

Cette fonction est intéressante via notamment son lien avec la transformée de Laplace :

$$L\left[t^{\gamma-\delta}E_{\gamma,\gamma-\delta+1}(\lambda t^\gamma)\right](s) = \frac{s^{\delta-1}}{s^\gamma - \lambda} \quad (5.11)$$

On obtient donc :

$$X(s) = x(0)L\left[E_{2\beta,1}(-w^2t^{2\beta})\right](s) \quad (5.12)$$

Il en va de même pour l'équation en p .

En prenant la transformée de Laplace inverse de ces équations, nous en déduisons que les solutions des équations du système hamiltonien (5.2) sont données par :

$$\begin{cases} x(t) &= x(0)E_{2\beta,1}(-w^2t^{2\beta}) \\ p(t) &= p(0)E_{2\beta,1}(-w^2t^{2\beta}) \end{cases} \quad (5.13)$$

Résolvons à présent l'équation (5.3).

Il convient de distinguer deux cas :

– si $0 < \beta < \frac{1}{2}$, alors $0 < 2\beta < 1$; d'après le lemme 1,

$$L\left[{}^C\mathcal{D}_t^{2\beta}x(t)\right](s) = s^{2\beta}X(s) - s^{2\beta-1}x(0) \quad (5.14)$$

La transformée de Laplace de l'équation en x est donc :

$$s^{2\beta}X(s) - s^{2\beta-1}x(0) + w^2X(s) = 0 \quad (5.15)$$

Par conséquent, $X(s) = x(0)\frac{s^{2\beta-1}}{s^{2\beta}+w^2}$

Les solutions sont alors identiques aux équations (5.13).

– Si $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$, alors $1 \leq 2\beta < 2$; un nouveau terme apparaît cette fois :

$$L\left[{}^C\mathcal{D}_t^{2\beta}x(t)\right](s) = s^{2\beta}X(s) - s^{2\beta-1}x(0) - s^{2\beta-2}x'(0) \quad (5.16)$$

Ainsi, $X(s) = x(0)\frac{s^{2\beta-1}}{s^{2\beta}+w^2} + x'(0)\frac{s^{2\beta-2}}{s^{2\beta}+w^2}$.

Par conséquent,

$$x(t) = x(0)E_{2\beta,1}(-w^2t^{2\beta}) + x'(0)tE_{2\beta,2}(-w^2t^{2\beta}) \quad (5.17)$$

Il en va de même pour p .

Le système (5.3) admet donc les solutions suivantes :

$$\text{si } 0 < \beta < \frac{1}{2}, \quad \begin{cases} x(t) = x(0)E_{2\beta,1}(-w^2t^{2\beta}) \\ p(t) = p(0)E_{2\beta,1}(-w^2t^{2\beta}) \end{cases} \quad (5.18)$$

$$\text{si } \frac{1}{2} \leq \beta < 1, \quad \begin{cases} x(t) = x(0)E_{2\beta,1}(-w^2t^{2\beta}) + x'(0)tE_{2\beta,2}(-w^2t^{2\beta}) \\ p(t) = p(0)E_{2\beta,1}(-w^2t^{2\beta}) + p'(0)tE_{2\beta,2}(-w^2t^{2\beta}) \end{cases} \quad (5.19)$$

5.3. Discussion. — Traçons tout d'abord l'allure des solutions des deux systèmes.

La figure (8) présente les solutions du système (5.2), pour $x(0) = 1, w = 1$. Le cas $\beta = 1$ n'est autre que la solution classique $x(t) = \cos(t)$. Le cas $\beta = 0.4$ est aussi associé à la solution du système (5.3).

La figure (8) présente les solutions du système (5.2), pour $x(0) = 1, x'(0) = -1, w = 1$.

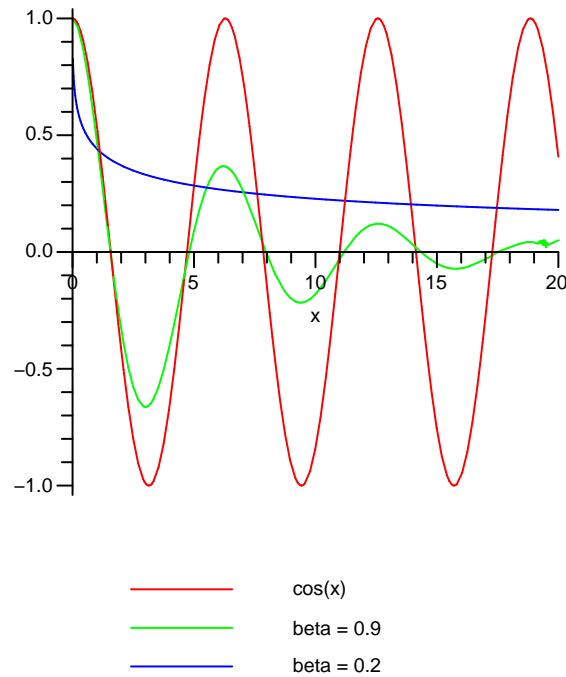


FIGURE 8. Solutions de l'équation (5.2), pour $\beta = 1, \beta = 0.9$ et $\beta = 0.4$.

La figure (8) permet de voir que plus β est petit, plus la solution est amortie. Les dérivées fractionnaires ont donc un caractère amortissant intrinsèque (voir [10] et [12] pour plus de détails). C'est d'ailleurs pour cela qu'elles sont utilisées pour la modélisation de systèmes dissipatifs : la modélisation des effets visqueux ne se fait plus via une force de frottement, mais par l'introduction de dérivées fractionnaires.

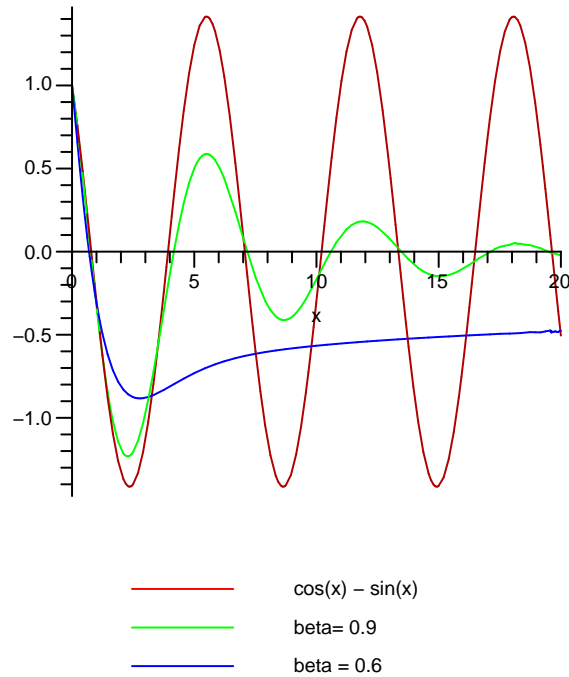


FIGURE 9. Solutions de l'équation (5.3), pour $\beta = 1$, $\beta = 0.9$ et $\beta = 0.6$.

Le deuxième point concerne l'incompatibilité des systèmes (5.2) et (5.3). Cela constitue une bonne illustration de la nécessité d'écrire les équations sous une "bonne" forme avant d'effectuer un plongement fractionnaire.

Cette différence entre les formulations se traduit notamment par un nombre différent de conditions initiales. Une équation ne faisant intervenir que l'opérateur ${}_0^C \mathcal{D}_t^\beta$, $0 < \beta < 1$ conduira à une solution caractérisée uniquement par sa valeur initiale, de manière similaire au cas classique. Mais ce qui devient remarquable dans le cas fractionnaire est que l'opérateur ${}_0^C \mathcal{D}_t^\beta \circ {}_0^C \mathcal{D}_t^\beta$ conduit aussi à une seule condition initiale, tandis que ${}_0^C \mathcal{D}_t^{2\beta}$ peut en induire deux. La différence entre ${}_0^C \mathcal{D}_t^{2\beta}$ et ${}_0^C \mathcal{D}_t^\beta \circ {}_0^C \mathcal{D}_t^\beta$ ne se résume donc pas à un simple terme de bord supplémentaire, mais conditionne le nombre de degrés de liberté du système. On comprend alors mieux l'enjeu du choix d'une "bonne" formulation pour les équations d'un système fractionnaire.

Dans l'article [10], A.A. Stanislavsky considère que les systèmes (5.2) et (5.3) sont équivalents et ne résout que le second. Les développements précédents semblent montrer le contraire. Pour être complet, mentionnons aussi que les solutions du système (5.3) diffèrent de celles trouvées par A.A. Stanislavsky car celui-ci semble finalement utiliser les résultats des dérivées de Riemann-Liouville pour sa résolution (voir [12]). C'est pour cette raison qu'il nous a semblé important de détailler ici les calculs.

Nous allons à présent revenir dans un cadre plus général et s'interroger sur la notion d'intégrale première dans le cas fractionnaire.

6. Théorème de Noether et intégrales premières

Commençons par donner une définition générale d'une intégrale première dans le cas classique :

Définition 26 (Intégrale première). — Soit $I : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que I est une intégrale première s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour toute trajectoire $x(t)$, pour tout t , $I(x(t)) = C$.

Pour les systèmes lagrangiens classiques, un outil puissant pour trouver des intégrales premières est le théorème de Noether : à toute symétrie du système est associée une quantité conservée au cours du mouvement. Pour les systèmes hamiltoniens classiques, c'est le crochet de Poisson qui permet une caractérisation des intégrales premières. Nous allons nous contenter de présenter ces deux notions dans le cas fractionnaire, car malheureusement, nous n'avons pu trouver de résultat satisfaisant sur ce sujet. Les intégrales premières classiques font apparaître des produits ou des compositions de fonctions, opérations qui se comportent bien avec la dérivation classique, mais qui deviennent incompatible avec la dérivée fractionnaire. Peut-être touche-t-on là aux limites du calcul fractionnaire.

6.1. Théorème de Noether. — Nous nous contentons de reproduire ici le travail de J. Cresson [2].

Définition 27. — Soit $\Phi = \{\phi\}_s$ une famille de difféomorphismes à un paramètre. Un Lagrangien admissible L est dit invariant sous l'action de Φ si :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad L(\phi_s(x), \mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta}(\phi_s(x))) = L(x, \mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta}x) \quad (6.1)$$

Une transformation infinitésimale est alors donnée par :

$$x(t) \mapsto x(t) + s\xi(x(t)) + o(s), \quad \text{où } \xi(x(t)) = \left. \frac{d\phi_s}{ds} \right|_{s=0} (x(t)) \quad (6.2)$$

Nous mentionnons alors le résultat suivant :

Théorème 18 (Théorème de Noether fractionnaire). — Soit L un Lagrangien admissible invariant sous l'action de $\Phi = \{\phi\}_s$. Alors :

$$\mathcal{D}_{-\mu}^{\beta,\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) \xi + \frac{\partial L}{\partial v} \mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} \xi = 0 \quad (6.3)$$

le long de toutes les solutions $x(t)$ de l'équation d'Euler-Lagrange fractionnaire (4.15).

Nous n'avons malheureusement rien pu tirer de cette équation ; les intégrations, d'ordre entier ou fractionnaire, n'ont pas donné de résultats significatifs. Comme on va le voir maintenant, le formalisme hamiltonien ne semble pas donner beaucoup plus de renseignements.

6.2. Intégrale première hamiltonienne. — Rappelons la définition du crochet de Poisson dans le cas classique :

Définition 28. — Soit $f(x, p)$ et $g(x, p)$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Leur crochet de Poisson, noté $\{\cdot, \cdot\}$, est défini par :

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, p) \frac{\partial g}{\partial p}(x, p) - \frac{\partial f}{\partial p}(x, p) \frac{\partial g}{\partial x}(x, p) \quad (6.4)$$

Pour les cas de systèmes hamiltoniens autonomes classiques de Hamiltonien $H(x, p)$, une fonction $I(x, p)$ est une intégrale première si et seulement si $\{I, H\} = 0$.

Afin d'essayer d'étendre cette caractérisation, introduisons au préalable la fonction ϕ définie par :

$$\phi(x, p) = \left(\mathcal{D}_{\mu}^{-(1-\alpha), -(1-\beta)} x, \mathcal{D}_{-\mu}^{-(1-\beta), -(1-\alpha)} p \right) \quad (6.5)$$

Nous étendons alors le crochet de Poisson de la manière suivante :

Définition 29 (Crochet de Poisson fractionnaire). — Soit $f(x, p)$ et $g(x, p)$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On définit leur crochet de Poisson fractionnaire, noté $\{\cdot, \cdot\}_{\mu}^{\alpha, \beta}$, par :

$$\{f, g\}_{\mu}^{\alpha, \beta} = \frac{\partial f}{\partial x} \circ \phi(x, p) \frac{\partial g}{\partial p}(x, p) - \frac{\partial f}{\partial p} \circ \phi(x, p) \frac{\partial g}{\partial x}(x, p) \quad (6.6)$$

Remarquons que dans le cas classique, $\phi = id$: on retrouve bien le crochet de Poisson (6.1).

Ce crochet nous permet alors d'étendre la notion d'intégrale première au cas fractionnaire :

Définition 30 (Intégrale première hamiltonienne). — Soit un système hamiltonien fractionnaire de Hamiltonien H . Soit $I(x, p)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On dit que I est une intégrale première hamiltonienne pour H si $\{I, H\}_{\mu}^{\alpha, \beta} = 0$.

Nous pouvons alors énoncer le résultat suivant :

Lemme 5. — Soit un système hamiltonien fractionnaire de Hamiltonien H vérifiant les équations (4.27). Soit $I(x, p)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Alors :

I est une intégrale première hamiltonienne pour H si et seulement si $I \circ \phi$ est une intégrale première (au sens classique).

Démonstration. —

$$\begin{aligned} \{I, H\}_{\mu}^{\alpha, \beta} &= \frac{\partial I}{\partial x} \circ \phi(x, p) \frac{\partial H}{\partial p}(x, p) - \frac{\partial I}{\partial p} \circ \phi(x, p) \frac{\partial H}{\partial x}(x, p) \\ &= \frac{\partial I}{\partial x}(\mathcal{D}_{\mu}^{-(1-\alpha), -(1-\beta)} x, \mathcal{D}_{-\mu}^{-(1-\beta), -(1-\alpha)} p) \mathcal{D}_{\mu}^{\alpha, \beta} x \\ &\quad + \frac{\partial I}{\partial p}(\mathcal{D}_{\mu}^{-(1-\alpha), -(1-\beta)} x, \mathcal{D}_{-\mu}^{-(1-\beta), -(1-\alpha)} p) \mathcal{D}_{-\mu}^{\beta, \alpha} p \\ &= \frac{dI}{dt}(\mathcal{D}_{\mu}^{-(1-\alpha), -(1-\beta)} x, \mathcal{D}_{-\mu}^{-(1-\beta), -(1-\alpha)} p) = \frac{d}{dt}(I \circ \phi)((x, p)(t)) \end{aligned}$$

car $\frac{d}{dt} \circ \mathcal{D}_{\mu}^{-(1-\alpha), -(1-\beta)} = \mathcal{D}_{\mu}^{\alpha, \beta}$ et $\frac{d}{dt} \circ \mathcal{D}_{-\mu}^{-(1-\beta), -(1-\alpha)} = \mathcal{D}_{-\mu}^{\beta, \alpha}$.

Ainsi, $\{I, H\}_{\mu}^{\alpha, \beta} = 0$ si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $(I \circ \phi)((x, p)(t)) = C$.

□

Cependant, il est fort probable que ce résultat n'ait aucune signification. Le lien apparent entre définition fractionnaire et définition classique semble en fait superficiel ; la présence de ϕ confère à $I \circ \phi$ un caractère implicitement fractionnaire.

6.3. Discussion. — Il nous semble que notre échec pour étendre la notion d'intégrale première est principalement dû à l'absence de règle de Leibniz pour les dérivées fractionnaires. De manière plus générale, la même question que précédemment se pose : quelle définition choisir pour l'intégrale première ? Sur quel critère peut-on se baser ? Ces questions sont loin d'être évidentes ; par exemple, la notion même de constante devient équivoque si l'on considère la dérivée de Riemann-Liouville : si $C \in \mathbb{R}^*$, ${}_a\mathcal{D}_t^\alpha C \neq 0$.

CONCLUSION

Ce travail nous a permis de découvrir un large panorama d'outils utiles à la compréhension des systèmes chaotiques.

Précisons, aussi minimes soient-ils, les apports de notre étude :

- formalisation du travail de A.A. Stanislavsky, conduisant à exhiber l'hypothèse (\mathcal{H}),
- extension des résultats de J. Cresson au cas des dérivées de Caputo,
- restriction causale du principe de moindre action, permettant de relier le formalisme de A.A. Stanislavsky à celui de J. Cresson,
- lien entre choix de l'équation fractionnaire et nombre de conditions initiales.

La découverte d'un lien possible entre ces deux domaines féconds que sont les systèmes hamiltoniens et le calcul fractionnaire, semble ouvrir de grandes perspectives de recherches, dans le but de comprendre et modéliser de nombreux systèmes physiques, dans des domaines très variés.

Références

- [1] Bowen, R. (1972) *Amer. J. Math.*, **94**, 413.
- [2] Cresson, J. (2007) *Fractional embedding of differential operators and Lagrangian systems*, *J. Math. Phys.*, **38**, 3.
- [3] Feller, W. (1949) *Trans. Amer. Math. Soc.*, **67**, 98.
- [4] Kac, M. (1958) *Probability and Related Topics in Physical Sciences*, Interscience, New York.
- [5] Laskar, J. (1989) *A Numerical Experiment on the Chaotic Behaviour of the Solar System*, *Nature*, **338**, 237-238.
- [6] Lévy, P. (1937) *Théorie de l'Addition des Variables Aléatoires*, Gautier-Villier, Paris.
- [7] Margulis G.A. (1969) *Funkts. Anal. i Prilozh.*, **3**, 80.
- [8] Margulis, G.A. (1970) *Funkts. Anal. i Prilozh.*, **4**, 62.
- [9] Oldham, K.B. and Spanier, J. (1974) *The fractional calculus : theory and applications of differentiation and integration of arbitrary order*, Academic Press.
- [10] Stanislavsky, A.A. (2006) *Hamiltonian formalism of fractional systems*, *Eur. Phys. J. B*, **49**, 93-101.
- [11] Zaslavsky, G.M. (2005) *Hamiltonian Chaos & Fractional Dynamics*, Oxford University Press, Oxford.
- [12] Zaslavsky, G.M., Stanislavsky A.A. and Edelman, M. (2006) *Chaotic and Pseudochaotic Attractors of Perturbed Fractional Oscillator*, *Chaos*, **16**, 013102.