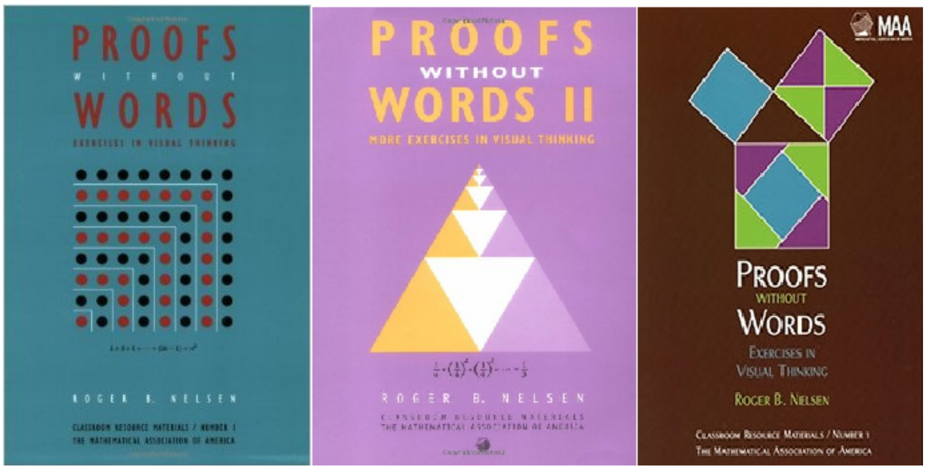
Preuves sans mots



Le but de ce projet est d'étudier certaines démonstrations appellées "preuves sans mots". Ces preuves sont visuelles et ne font appel à aucun formalisme. Ce procédé a bien entendu ses limitations, mais comme nous allons le voir, les preuves sans mots de quelques résultats classiques réservent de belles surprises.

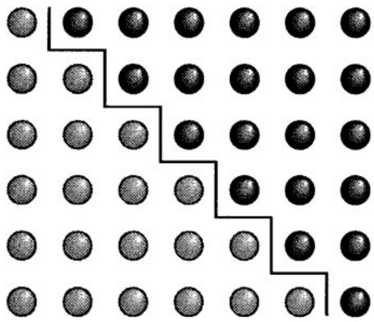
1. La formule de sommation de Gauss

Nous voulons démontrer la formule

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

connue sous le nom de formule de sommation de Gauss car, suivant la légende, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) l'aurait démontrée à 9 ans à la grande surprise de son maître.

Vous pouvez bien évidemment écrire dans un premier temps la démonstration de cette formule sous une forme classique. Ce type de formule se démontre en général en utilisant le principe de raisonnement par récurrence qui est très puissant. Une preuve sans mots est donnée par la figure suivante :

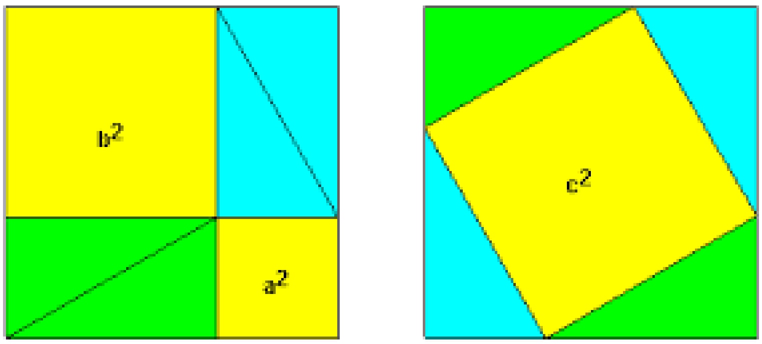


$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

C'est l'exemple le plus simple de preuve sans mots. Elle était déjà semble-t-il connue dans la grèce antique. Continuons notre exploration.

2. Le théorème de Pythagore

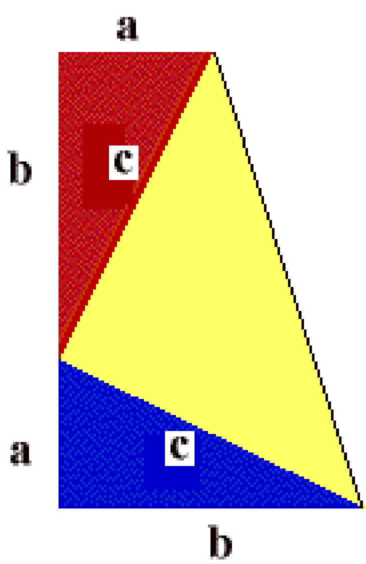
Le théorème de Pythagore est une vedette des théorèmes de géométrie que l'on apprend au collège. Voici deux preuves sans mots à étudier et justifier :



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Elle est due à un auteur inconnu qui vivait en Chine vers -200 ans avant JC.

La seconde démonstration sans mot est attribuée au vingtième président des États-Unis, James Garfield.



Il me semble que pour celle-ci quelques mots s'imposent quand même !

3. Recherche d'une preuve sans mots

Cette section vous demandera un peu plus de travail que les précédentes. Vous allez vous même construire des preuves sans mots.

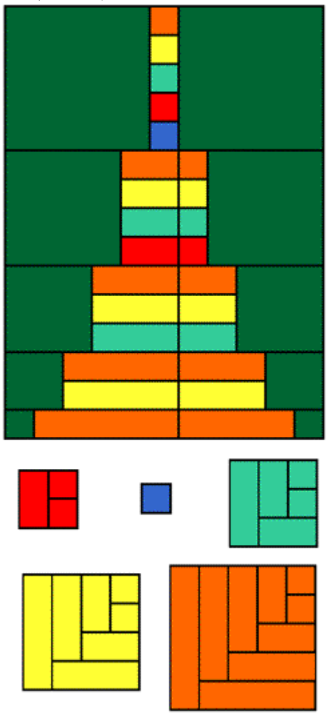
1. Donner une preuve sans mot que la somme des nombres impaires est toujours un carré.
2. Donner une preuve sans mot de l'identité $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a+b)^2$.
3. Donner une preuve sans mot du fait que la moyenne géométrique de deux nombres a et b donnée par $\sqrt{ab}$ est toujours inférieure à la moyenne arithmétique de ces deux nombres $(a+b)/2$.

La première question est simple, la seconde un peu moins. Une solution a été proposée par Shirley Walkin en 1984. Pour la troisième, une solution a été donnée par Charles D. Gallant en 1977.

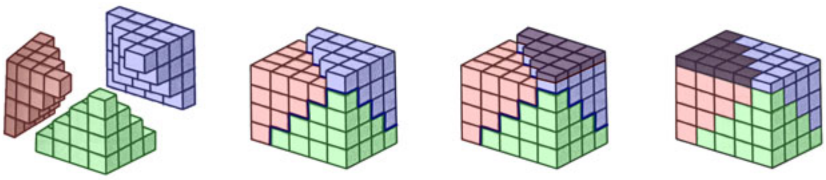
4. Des preuves sans mots à traduire...

Je vais maintenant donner quelques preuves sans mots dont vous allez chercher la signification.

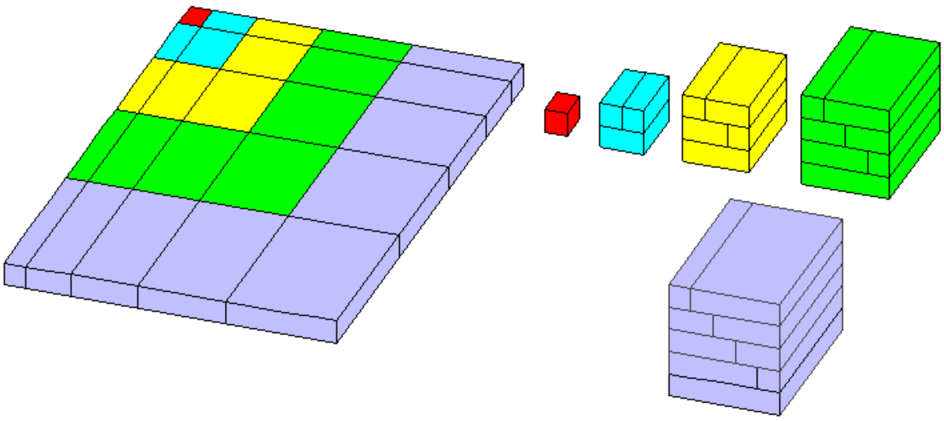
4.1. Premier défi. — La première est tirée du livre 'The Book of Numbers' par J.H. Conway et R. Guy (1996) :



Comme nous ne voyons pas tous la même chose, je vous donne une autre représentation du même calcul due à Keung Siu en 1984.



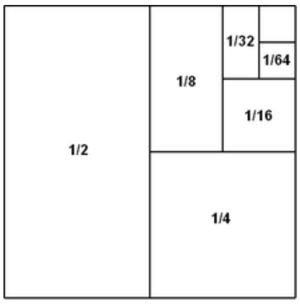
4.2. Second défi. — C'est une construction très analogue à la précédente. Elle est due à Solomon Wolf Golomb en 1984.



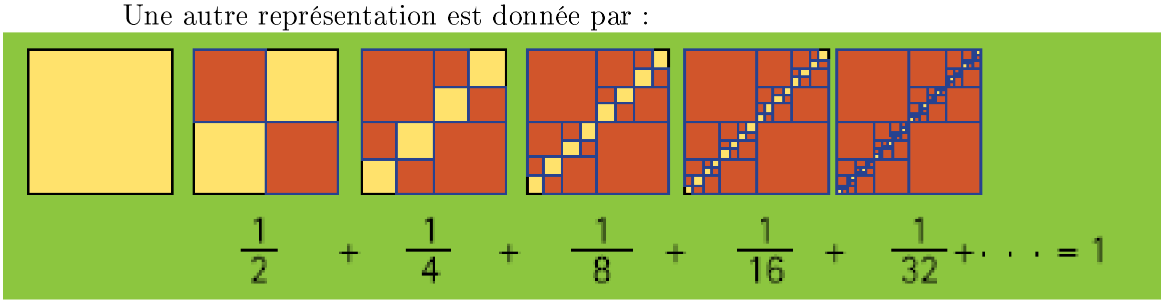
5. Quelques sommes de fractions

Nous allons donner quelques preuves sans mots de somme de fractions qui sont esthétiquement très belles. POur chacune des figures présentées, vous devez écrire l'explication associée.

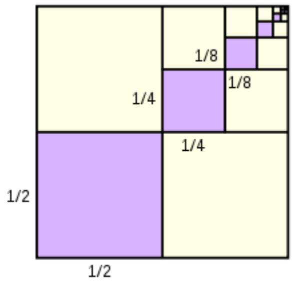
5.1. Inverse des puissances de 2. — C'est un cas simple et instructif.



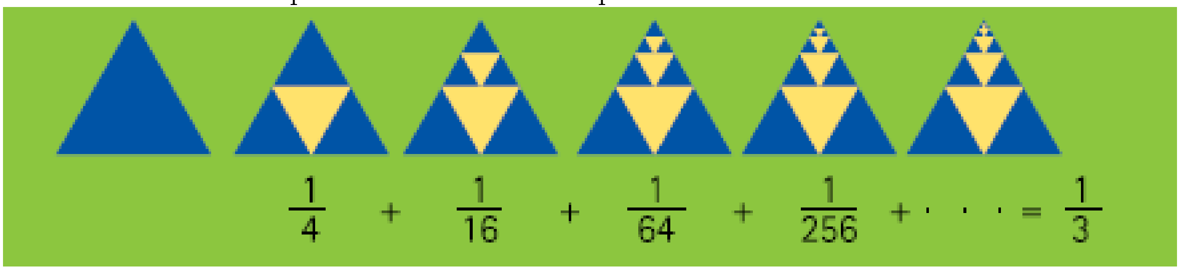
Une autre représentation est donnée par :



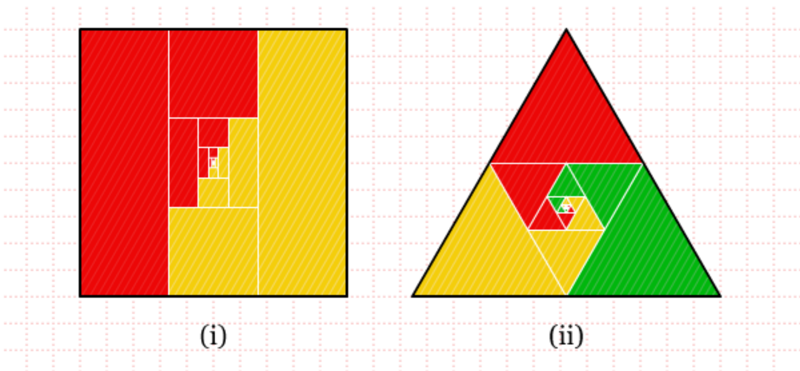
5.2. Inverse des puissances de 4. — Il est un peu plus compliqué mais le principe de construction peut s'utiliser pour d'autres sommes de fractions.



Une autre représentation est donnée par :



5.3. D'autres exemples. — On peut imaginer la représentation de beaucoup de somme de suites géométriques. Un exemple que je vous laisse découvrir :

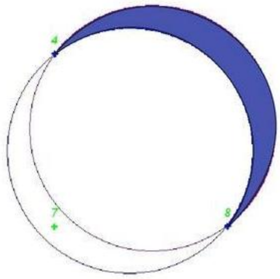


Pouvez-vous expliciter un procédé pour représenter toutes les sommes de suites géométriques ?

6. Le théorème de Hiipocrate de Chios

Tout d'abord une définition :

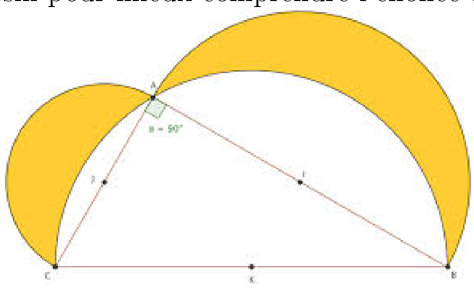
Une lunule est une portion de surface délimitée par deux cercles non concentriques de rayons différents, formant une figure en forme de croissant de lune.



Le théorème suivant est dû à Hippocrate de Chios il y a environ 2400 ans.

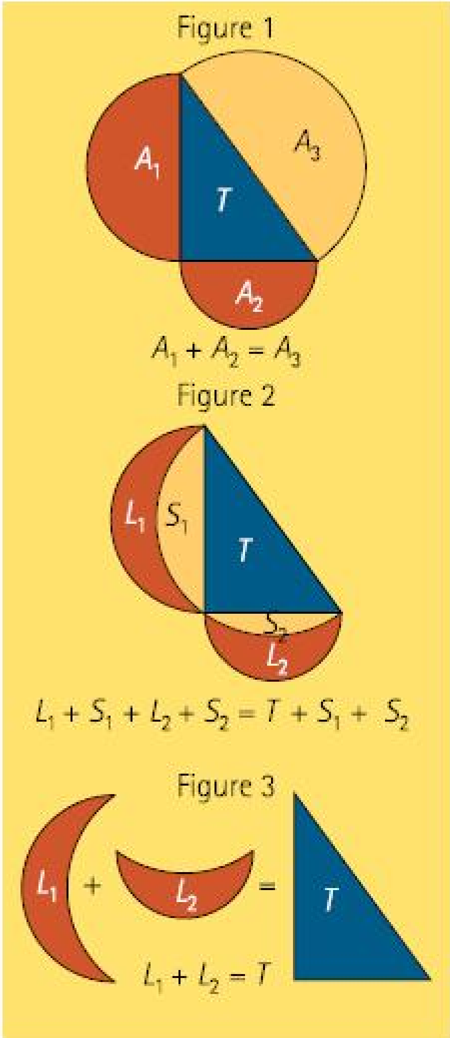
Théorème de Hippocrate de Chios : *La somme des aires des deux lunules construites sur les petits côtés d'un triangle rectangle est égale à l'aire du triangle lui-même.*

Voici un petit dessin pour mieux comprendre l'énoncé :



Je vous laisse chercher une démonstration classique. Voici une démonstration sans mots :

Lunules d'Hyppocrate

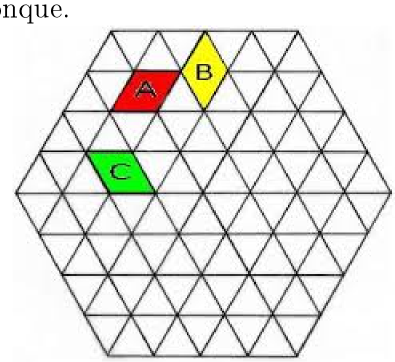


Pouvez vous reconstruire la démonstration et expliquer chacune des étapes de manière "classique" ?

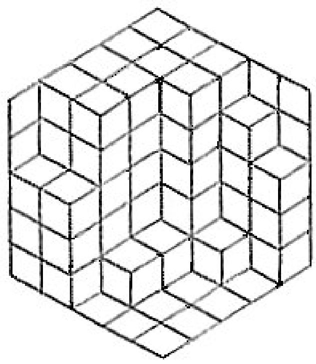
7. Le théorème des calissons

"The Problem of Calissons" a été formulé par G David and C Tomei dans la revue American Mathematical Monthly, Vol 96(5), May 1989, p. 429 - 431.

Le calisson est une friandise à base de pâte d'amande, une spécialité d'Aix en Provence dans le midi de la France. Sa forme est celle d'un losange obtenu en accolant deux triangles équilatéraux égaux. Avec des calissons identiques de côté 1 on peut remplir une boite régulière hexagonale dont le côté est un nombre entier n quelconque.



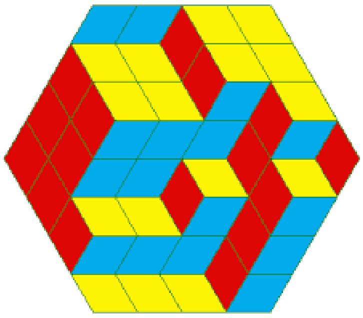
Les calissons utilisés se répartissent alors en trois groupes, suivant leur orientation. Un exemple est donné par :



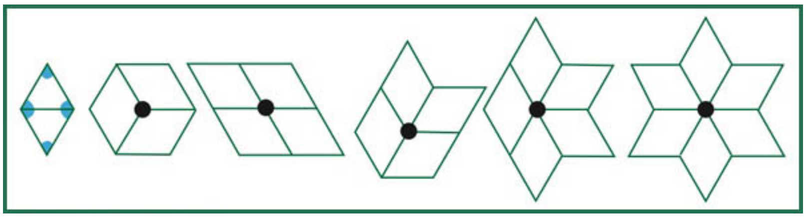
Le théorème des calissons est le suivant :

Théorème des calissons : *Quelque soit le rangement proposé, les trois groupes comportent le même nombre de calissons.*

Dans leur article, les auteurs ont fourni une preuve sans mots qui passe par une "illusion d'optique" puisqu'elle transforme par le biais d'un coloriage le problème initial plan en une figure d'empilement de cubes. Voici la preuve :



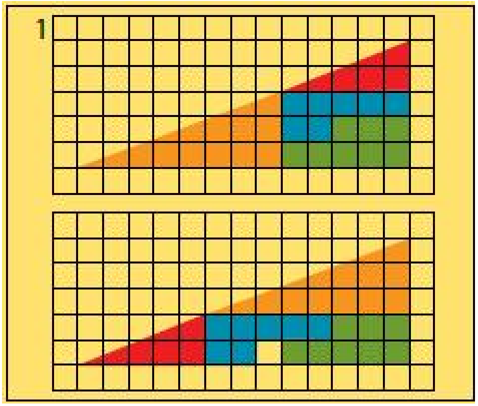
J'avoue que la preuve sans mots me laisse un peu sans voix. Il me semble que des mots d'explication s'imposent, mais peut-être pas.....c'est à vous de voir. Pour ma part, je trouve qu'une bonne manière de réfléchir à ce problème est de repartir du début....c'est à dire de la façon de coller des calissons entre eux. Il n'y a pas beaucoup de possibilités et je pense que le théorème des calissons est plutôt une illustration de cette limitation....mais je n'ai pas écrit de preuve...juste fait un dessin que voici :



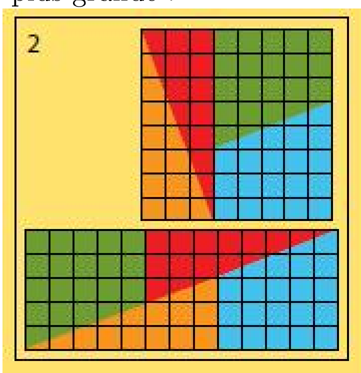
8. Les paradoxes à la Paul Curry

Les démonstrations que nous venons de voir ont une force certaine, mais elles ne remettent pas en cause la mise en forme "avec des mots" des démonstrations. Ces preuves formelles peuvent parfois sembler trop compliquées pour ce qu'elle démontre mais elles ont une puissance qui dépasse largement les possibilités des preuves sans mots. En particulier, elles possèdent deux avantages majeurs : elles peuvent sans problème aborder des questions où nous n'avons plus de "visuel" (qui a vu un espace à 12 dimensions ?) et elles ne se laissent pas abuser par nos sens. Je vous donne quelques exemples pour lesquels il faut chercher pourquoi ça ne fonctionne pas !

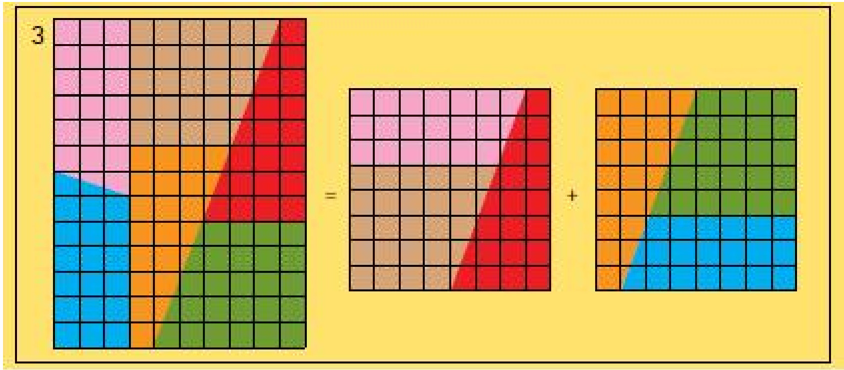
8.1. Le carré manquant de Paul Curry. — Paul Curry était un magicien qui inventa en 1953 le puzzle du carré manquant que voici :



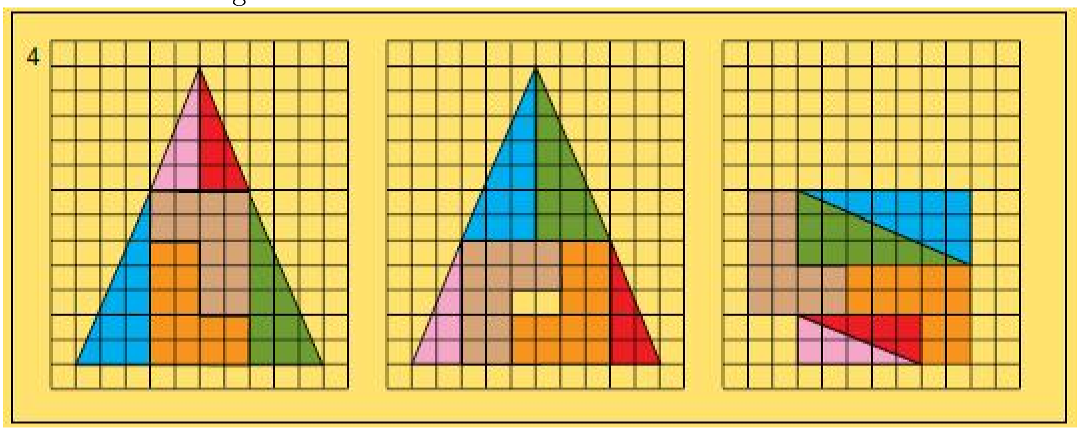
8.2. Puzzle de Sam Lyoid $64 = 65$ **!**— Sur le même principe que le puzzle de Paul Curry, on trouve dans la littérature d'autres puzzles dûs à Sam Lyoid qui partent d'une figure sans carré manquant et qui par recombinaison donnent une figure dont l'aire est plus grande !



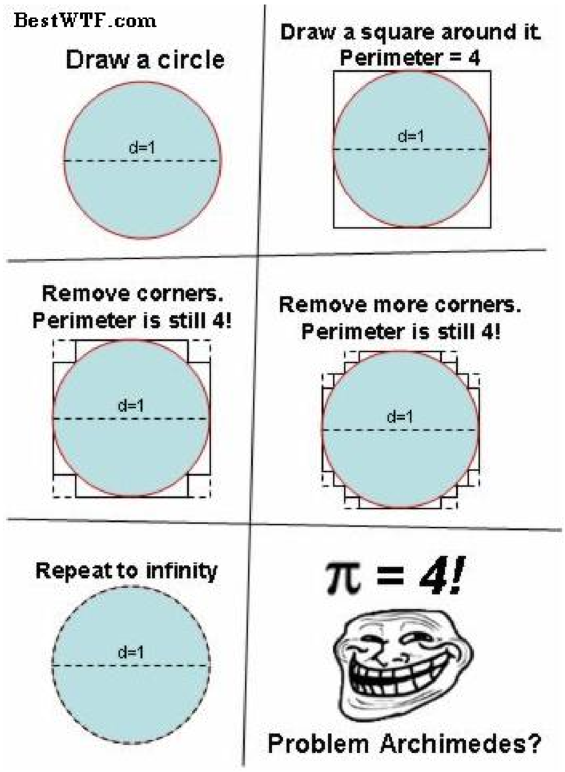
8.3. Puzzle de Sam Lyoid $130 = 128$ **!**— Un autre puzzle déconcertant !



8.4. Puzzle de Vosburg $60 = 59!$— Ce dernier paradoxe est dû au psychiatre L. Vosburg :



8.5. Une "démonstration" de $\pi = 4$!— La "démonstration" qui suit est évidemment fausse. Je vous la livre quand même juste pour vous faire réfléchir.....il me semble que le pourquoi pour lequel elle ne fonctionne pas est un peu compliqué....mais un détour par le groupe travaillant sur les fractals sera sans doute intéressant.



9. Quelques mots sur les mathématiciens qui apparaissent dans ce projet

Toutes les biographies qui suivent proviennent des pages Wikipedia correspondantes.

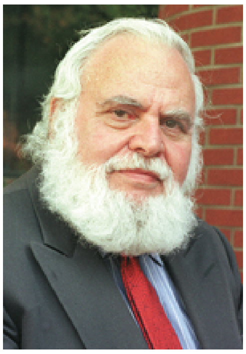
9.1. Johann Carl Friedrich Gauss. — Johann Carl Friedrich Gauss, né le 30 avril 1777 à Brunswick et mort le 23 février 1855 à Göttingen, est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Il a apporté de très importantes contributions à ces trois domaines.

Surnommé « le prince des mathématiciens », il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.

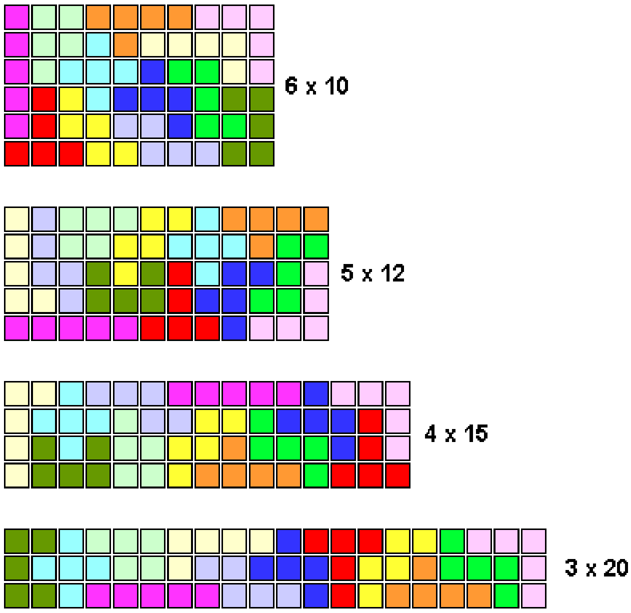
9.2. Samuel Loyd. — Samuel Loyd (Philadelphie le 30 janvier 1841 - 10 avril 1911) est un compositeur américain de casse-tête numériques et logiques relevant des mathématiques récréatives.

Il est la figure de proue de l'école nord-américaine de problémistes (1860-1900)

9.3. Solomon Wolf Golomb. — Solomon Wolf Golomb, né en 1932 à Baltimore, Maryland, est un mathématicien et un informaticien américain à l'origine du graphe de Golomb, des règles de Golomb, de la suite de Golomb et du codage de Golomb utilisé en compression de données.



Il a également introduit les polyominos dans un livre intitulé Polyominoes. Ce jeu a inspiré Tétris.



Références

Ce projet est basé sur de nombreuses lectures mais parmi celles-ci, on trouve :

- Jean-Paul Delahaye, L'arithmétique malmenée par la géométrie, Accromath Vol.9, 2014.
- Jean-Paul Delahaye, Les preuves sans mots, Pour la Science no. 244, 1998.

– Jean-Paul Delahaye, Preuves sans mots, Accromath Vol.3, 2008.
– Georg Glaser, Konrad Polthier, Surprenantes images des mathématiques, Edition Belin-Pour la science, 2013.
– Les pages de Wikipedia concernant la plupart des objets évoqués dans ce projet.