C. R. Acad. Sci. Paris, t. 333, Série I, p. 229–232, 2001
Systèmes dynamiques/*Dynamical Systems*

Hyperbolicité et non-intégrabilité analytique. II. Tores normalement et partiellement hyperboliques

Jacky CRESSON

Équipe de mathématiques de Besançon, CNRS-UMR 6623, 16, route de Gray, 25030 Besançon cedex, France
Courriel : cresson@math.univ-fcomte.fr

(Reçu le 9 avril 2001, accepté le 11 juin 2001)

Résumé. Soit T un tore invariant partiellement hyperbolique d'un système hamiltonien analytique H. Soit $\mathcal{H}$ la variété d'énergie contenant T. On fait les hypothèses suivantes : le flot sur le tore est minimal ; les variétés stable et instable de T se coupent transversalement dans $\mathcal{H}$; les valeurs propres associées à $W^-(T)$ (resp. $W^+(T)$) vérifient la condition de non-résonance. Alors il n'existe pas d'intégrale première analytique non triviale indépendante de H.

Hyperbolicity and analytical non-integrability II

Abstract. *Let T be an invariant partially hyperbolic torus of an analytic Hamiltonian system. Let $\mathcal{H}$ be the energy level of H containing T. If the flow is minimal on the torus, its stable and unstable manifold intersect transversally in $\mathcal{H}$ and the eigenvalues associated to the stable (resp. unstable) manifold satisfy the non-resonance condition, then there exits no non-trivial analytic first integral independent of H.*

1. Notations et résultat principal

1.1. *Tores partiellement hyperboliques.* – Soient M une variété symplectique de dimension $2n+2l$ et H un Hamiltonien défini sur M. On appelle tore *partiellement hyperbolique,* un tore invariant de dimension n, au voisinage duquel le Hamiltonien peut se mettre sous la forme

$$H(\phi, I, x, y) = \widetilde{w} \cdot I + \frac{1}{2} I \cdot \Gamma I + x \cdot \Pi y + g(\phi, I, x, y), \tag{1}$$

où $(\phi, I, x, y) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$, avec $\cdot$ le produit scalaire usuel, Γ et Π des matrices symétriques et g d'ordre 3 en (I, x, y).

On suppose de plus que $\widetilde{w}$ satisfait une condition diophantienne $|\widetilde{w} \cdot k| \geqslant \gamma/|k|^\tau$, pour tout $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, $\gamma > 0$ et $\tau > 1$.

Le tore partiellement hyperbolique T est défini par $T = \{(\phi, I, x, y) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \mid I = x = y = 0\}$. Sa variété stable $W^-(T)$ (resp. instable $W^+(T)$) est définie par $I = y = 0$ (resp. $I = x = 0$).

Comme $\widetilde{w}$ est non résonant, il existe une surface de section S de dimension $2n$ au voisinage de T dans laquelle l'application de premier retour prend la forme

$$f(\theta, \rho, s, u) = \big(\theta + 2\pi w + \nu\rho, \rho, \Lambda s, \Lambda^{-1} u\big) + r(\theta, \rho, s, u), \tag{2}$$

Note présentée par Charles-Michel MARLE.

S0764-4442(01)02041-9/FLA

où $(\theta,\rho,s,u) \in \mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^l \times R^l$, r est d'ordre 2 en ρ, s et u, w est non-résonant, et Λ est une matrice diagonale de valeurs propres réelles λ_i, $i=1,\dots,l$.

Remarque. – Les tores invariants partiellement hyperboliques obtenus par bifurcation des tores résonants des systèmes hamiltoniens presque intégrables le long d'une résonance simple $(l=1)$, possèdent une application de premier retour de la forme (2). Pour $l>1$, il faut imposer des conditions de réductibilité particulières du flot sur le tore.

DÉFINITION 1. – Un point $(\theta,0,s,0)$ (resp. $(\theta,0,0,u)$ de $W^-(T)$ (resp. $W^+(T)$) sera dit générique si $s \neq 0$ (resp. $u \neq 0$).

1.2. *Résultats.* – Dans cette Note, nous démontrons le théorème suivant :

THÉORÈME 1. – *Soit T un tore invariant partiellement l-hyperbolique d'un Hamiltonien analytique H, $l \geqslant 1$. Soit $\mathcal{H}$ la variété d'énergie contenant T. On suppose que* : (i) *la variété stable et la variété instable de T se coupent transversalement dans $\mathcal{H}$ en un point homocline générique,* (ii) *les valeurs propres λ_i, $i=1,\dots,l$, vérifient la condition de non-résonance $\lambda^\nu \neq 1$, où $\nu \in \mathbb{Z}^l \setminus \{0\}$, $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_l)$, $\lambda^\nu=\lambda_1^{\nu_1}\dots\lambda_l^{\nu_l}$,* (iii) *la fréquence $\widetilde{w}$ de* (1) *est non résonante.*

Alors, il n'existe pas d'intégrale première analytique non triviale indépendante de H.

La démonstration utilise la démarche développée dans [5]. La condition de minimalité du flot sur le tore n'est pas spécifique au cas partiellement hyperbolique. En effet, nous avons :

THÉORÈME 2. – *Soit T un tore invariant normalement hyperbolique d'un difféomorphisme analytique f d'une variété analytique M de dimension $n+2l$, $n,l \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe un système de coordonnées analytiques $(\theta,s,u) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$ défini sur un voisinage ouvert U de T tel que*

$$f(\theta,s,u) = \left(\theta+2\pi w, \Lambda^+ s, \Lambda^- u\right) + r(\theta,s,u), \tag{3}$$

où Λ^-, Λ^+, sont des matrices diagonales de valeurs propres réelles $0<\lambda_i^-<1$, $\lambda_i^+>1$, $i=1,\dots,l$, r est d'ordre 2 en s et u et $r(\theta,0,u)=0$, $r(\theta,s,0)=0$.

On suppose de plus que : (i) *la variété stable et la variété instable se coupent transversalement en un point homocline générique,* (ii) *la fréquence w est non résonnante,* (iii) *les valeurs propres associées à la variété stable* (*resp. instable*) *vérifient la condition de non-résonance.*

Alors, il n'existe pas d'intégrale première analytique pour le système dynamique discret défini par f.

Comme dans le cas partiellement hyperbolique, on a en général, dépendance de Λ^- et Λ^+ en θ (*voir* [5]). Ceci nous conduit à la conjecture suivante :

CONJECTURE. – *Soit f un difféomorphisme analytique d'une variété* (*analytique*) *M, et A un ensemble invariant compact hyperbolique de f. On suppose que* : (i) *la variété stable et la variété instable de A se coupent transversalement,* (ii) *f a une dynamique minimale sur A,* (iii) *les valeurs propres de f associées à la variété stable* (*resp. instable*) *vérifient la condition de non-résonance.*

Alors, il n'existe pas d'intégrale première analytique pour le système défini par f.

Dans le cas où A possède une structure produit, la conjecture découle essentiellement de la démonstration du théorème 2.

1.3. *Principe de démonstration.* – On rappelle la démarche dégagée dans [1]. La démonstration est basée sur deux résulats :

– Un lemme de trivialité :

LEMME DE TRIVIALITÉ. – *Soit T un tore normalement* (*resp. partiellement*) *hyperbolique. Soit h^+* (*resp. h^-*) *un point générique de $W^+(T)$* (*resp. $W^-(T)$*)*, et P une fonction analytique, nulle sur l'orbite $\gamma(h^+)$* (*resp. $\gamma(h^-)$*) *de h^+* (*resp. h^-*)*. Si les valeurs propres de Λ^+* (*resp. Λ^-*) *vérifient la condition de non-résonance et si le flot sur T est minimal, alors $P \equiv 0$ sur $W^+(T)$* (*resp. $W^-(T)$*).

Ce lemme est démontré au § 2 (resp. § 3) dans le cas d'un tore normalement (resp. partiellement) hyperbolique.

– Un lemme géométrique :

LEMME GÉOMÉTRIQUE. – *Soient M une variété de dimension n et V^- (resp. V^+) une sous-variété de dimension n^- (resp. n^+) telles que V^- et V^+ se coupent transversalement dans M. Soit P une fonction de classe C^1, constante sur $V^- \cup V^+$, alors $DP(x) = 0$ en tous les points $x \in V^- \cap V^+$.*

On renvoie à [1] pour la démonstration.

Avant de décrire le principe général de démonstration des théorèmes 1 et 2, nous devons préciser la notion de non-intégrabilité analytique utilisée dans le théorème 2. En effet, si le système hamiltonien défini par H possède une intégrale première analytique non triviale indépendante de H, alors la restriction du système à une variété d'énergie donnée admet une intégrale première analytique non triviale. La démonstration qui suit démontre que cela n'est pas possible.

Soit h un point homocline et $\gamma(h)$ son orbite. Soit P une intégrale première analytique pour f. L'idée est de démontrer par récurrence, l'annulation des dérivées successives de P, notées $DP^i(x)$, en tous les points $x \in \gamma(h)$. Comme P est analytique, on en déduit $P = \text{const}$. L'hypothèse de récurrence (h_n), $n \geqslant 1$, est la suivante : (h_n) On a $DP^i(x) = 0$ pour tout $x \in \gamma(h)$ et $i \leqslant n$.

L'hypothèse est vérifiée en $n = 1$. En effet, on a $P(x) = \text{const}$ sur $W^-(T) \cup W^+(T)$ par définition. Le lemme géométrique implique $DP(x) = 0$ pour tout $x \in \gamma(h)$. Montrons que (h_n) implique (h_{n+1}) : d'après (h_n), on a $DP^n(x) = 0$ pour tout $x \in \gamma(h)$. Par le lemme de trivialité, on en déduit $DP^n|_{W^-(T)} = 0$ et $DP^n|_{W^+(T)} = 0$. Le lemme géométrique implique donc $DP^{n+1}(x) = 0$ pour tout $x \in \gamma(h)$. Par récurrence, nous avons donc $DP^i(x) = 0$ pour tout $x \in \gamma(h)$ et $i \geqslant 1$, ce qui termine la démonstration des théorèmes 1 et 2.

Pour compléter cette démonstration, il reste à démontrer le lemme de trivialité pour un tore normalement (resp. partiellement) hyperbolique. C'est l'objet des § 2 et 3.

2. Lemme de trivialité pour un tore normalement hyperbolique

Dans le système de coordonnées $(\theta, s, u) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$ défini sur le voisinage ouvert U de T, le tore invariant est donné par $T = \{(\theta, s, u] \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \mid s = u = 0\}$, et sa variété stable (resp. instable) par $W^-(T) = \{(\theta, s, u) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \mid u = 0\}$ (resp. $W^+(T) = \{(\theta, s, u) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \mid s = 0\}$).

Nous donnons la démonstration du lemme de trivialité sur $W^-(T)$, celle-ci étant analogue pour $W^+(T)$. Soit P une fonction analytique sur $W^-(T)$ de la forme

$$P(\theta, s) = \sum_{k \in \mathbb{N}^l} a_k(\theta) s^k,' \tag{4}$$

où $a_k(\theta)$ est une fonction 2π-périodique en θ. Soit $h^- = (\theta^-, s^-) \in U \cap W^-(T)$ tel que $s^- \neq 0$ car h^- est générique. La restriction de f à $W^-(T)$ est définie dans $U \cap W^-(T)$ par $f^-(\theta, s) = (\theta + w, \Lambda^- s)$. Par hypothèse, on a $P((f^-)^m(h^-)) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, soit $\sum_{k \in \mathbb{N}^l} a_k(\theta^- + mw)((\Lambda^-)^m s^-)^k = 0$, pour tout $m \in \mathbb{N}$, d'où

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^l} a_k(\theta^- + mw)(\lambda^-)^{mk}(s^-)^k = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

car Λ^- est diagonale.

Comme les valeurs propres λ^- vérifient la condition de non-résonance, il est possible d'ordonner totalement les $(\lambda^-)^k$, soit $(\lambda^-)^{k_0} < (\lambda^-)^{k_1} < \cdots < (\lambda^-)^{k_i} < \cdots$. L'équation (5) s'écrit donc

$$\sum_{i \geqslant 0} a_{k_i}(\theta^- + mw)(\lambda^-)^{mk_i}(s^-)^{k_i} = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

L'annulation de P se fait alors par récurrence. On met $(\lambda^-)^{mk_0}$ en facteur dans (6). On obtient

$$a_{k_0}(\theta^- + mw) + \sum_{i \geqslant 1} a_{k_i}(\theta^- + mw)\left(\frac{(\lambda^-)^{k_i}}{(\lambda^-)^{k_0}}\right)^m (s^-)^{k_i} = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Comme $(\lambda^-)^{k_i}/(\lambda^-)^{k_0}<1$ par définition, on a, en faisant tendre m vers l'infini $\lim_{n\to\infty} a_{k_0}(\theta^-+mw)=0$. Comme w est non résonant, on en déduit, $a_{k_0}(\theta)=0$ pour tout $\theta\in\mathbb{T}^n$. Une récurrence sur i termine la démonstration. $\square$

3. Lemme de trivialité pour un tore partiellement hyperbolique

La démonstration du lemme de trivialité pour un tore partiellement hyperbolique se ramène au cas d'un tore normalement hyperbolique. En effet, l'hyperbolicité partielle n'intervient pas dans le lemme de trivialité.

La variété stable est définie par $W^-(T)=\{(\theta,I,s,u)\in\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^l \mid I=u=0\}$. Une fonction analytique sur $W^-(T)$ est donc de la forme $P(\theta,s)=\sum_{k\in\mathbb{N}^l} a_k(\theta)s^k$. Comme par ailleurs la dynamique sur $W^-(T)$ est donnée par $f^-(\theta,s)=(\theta+2\pi w,\Lambda s)$, on est conduit à résoudre l'équation (5).

4. Diffusion d'Arnold et non-intégrabilité analytique du problème des 3 corps

Le problème restreint elliptique plan des 3 corps est l'étude du mouvement d'une particule A de masse nulle, en interaction newtonienne avec deux points J et S, de masse $\mu\in]0,1[$ et $1-\mu$ respectivement, tels que le vecteur *SJ* décrive une ellipse d'excentricité e dont le foyer est situé à leur centre de masse O. Le Hamiltonien de ce problème s'écrit

$$H_{e,\mu}(t,q,p)=\frac{\|p\|^2}{2}-\left(\frac{\mu}{\delta(t,q,e)}+\frac{1-\mu}{\sigma(t,q,e)}\right), \tag{8}$$

où $(t,q,p)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$, $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne, $\delta(t,q,e)=\|q-J_t\|$, $\sigma(t,q,e)=\|q-S_t\|$ avec $S_t=((1-\mu)r\cos u,\ (1-\mu)r\sin u)$, $J_t=(-\mu r\cos u,\mu r\sin u)$, $r=(1-e^2)/(1+e\cos u)$ et $u=e\sin u+t/(\sqrt{1-e^2}\,)$.

Dans [3], J. Xia a démontré, dans son étude sur la diffusion d'Arnold dans le problème des 3 corps, le théorème suivant :

THÉORÈME 3. – *Pour $0<\mu\ll 1$ et $0<e\ll\mu$, il existe des tores invariants partiellement 1-hyperboliques pour $H_{e,\mu}$. On note $\mathcal{H}_{e,\mu}$ la variété d'énergie contenant ces tores. La variété stable et la variété instable de chacun de ces tores se coupent transversalement dans $\mathcal{H}_{e,\mu}$.*

L'application de premier retour définie au voisinage des tores de Xia est de la forme (2). De plus, la dynamique sur chacun de ces tores est minimale. Comme ils sont 1-hyperboliques, la condition de non-résonance sur les valeurs propres associées à la variété stable (resp. instable) des tores de Xia est automatiquement satisfaite de même que la généricité du point homocline. Le théorème 1 s'applique et on a :

THÉORÈME 4. – *Le problème restreint elliptique plan des trois corps n'admet pas d'intégrale première analytique non triviale autre que $H_{e,\mu}$ pour $0<\mu\ll 1$ et $0<e\ll\mu$.*

Ce théorème est annoncé par Xia dans [3] sans démonstration. Ce résultat s'étend au problème plan des 3 corps en utilisant [4].

Références bibliographiques

[1] Cresson J., Rabiet M., Hyperbolicité et non-intégrabilité analytique I. Points hyperboliques, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 332 (2001) 325–328.

[2] Treshchev D., The mechanism of destruction of resonance tori for Hamiltonian systems, Math. USSR Sbornik 68 (1991) 181–203.

[3] Xia J., Arnold diffusion in the elliptic restricted three-body problem, J. Dynamics Differential Equations 5 (2) (1993).

[4] Xia J., Arnold diffusion and oscillatory solutions in the planar three-body problem, J. Differential Equations 110 (1994) 289–321.

[5] Wiggins S., Global Bifurcation and Chaos, Appl. Math. Sci., Vol. 73, Springer, 1988.