

Dynamique symbolique et tores partiellement hyperboliques

Jacky CRESSON

Équipe de mathématiques de Besançon, CNRS-UMR 6623, 16, route de Gray, 25030 Besançon cedex, France
Courriel : cresson@math.univ-fcomte.fr

(Reçu le 13 mars 2000, accepté le 27 avril 2000)

Résumé. Nous généralisons le théorème de Birkhoff–Smale au cas des tores partiellement hyperboliques intervenant dans les perturbations des systèmes hamiltoniens complètement intégrables. On en déduit de nouveaux résultats sur la dynamique le long d’une chaîne de transition (au sens de V.I. Arnol’d). © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Symbolic dynamics and partially hyperbolic tori

Abstract. We generalize the classical Birkhoff–Smale theorem for partially hyperbolic tori, which arise near simple resonances in near-integrable Hamiltonian systems. As a consequence, we deduce new results on the dynamics along a transition chain (following V.I. Arnol’d terminology). © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

In 1964, Arnol’d [1] in a famous paper has given an example of a three degrees of freedom near-integrable Hamiltonian system where an instability of the action variables occurs. The mechanism which generates this instability is based on the existence in the perturbed system of chain of partially hyperbolic tori connected by heteroclinic orbits. The aim of this work is to precise the dynamics near these tori and along a chain.

We extend (Theorem 1) the classical Birkhoff–Smale theorem [9] for hyperbolic points or (normally) hyperbolic tori to partially hyperbolic tori: if the stable and unstable manifold of a partially hyperbolic torus intersect transversely, then there exists a hyperbolic invariant set near a homoclinic orbit on which the dynamics is conjugated to a Bernoulli shift.

Several authors, including Holmes and Marsden [6] have conjectured such a result. Difficulties are due to the partial hyperbolicity of the tori. A particular case is studied by Easton [5].

Our proof is based on the following key results :

- (i) if the flow on the torus is with torsion, then we have a result similar to the classical λ -lemma of J. Palis for hyperbolic points [4];

Note présentée par Jean-Christophe Yoccoz.

- (ii) transversality of the stable and unstable manifold together with torsion of the flow on the torus produce “hyperbolicity” (Lemma 1);
- (iii) the minimal dynamics on the torus allows us to localize a neighborhood of the homoclinic orbit where hyperbolicity exists (it gives the alphabet of symbolic dynamics).

We then discuss the relevance of this result on Arnol’d’s diffusion. We first prove that along a transition chain, we can construct a “dual” chain of hyperbolic periodic orbits (Theorem 2). We then use classical results on hyperbolic dynamics to prove the Holmes–Marsden’s conjecture: along a transition chain, there exists periodic orbits of arbitrary high period (Corollary 1).

1. Introduction

Nous démontrons un analogue du théorème de *Birkhoff–Smale* [9] pour les tores partiellement hyperboliques possédant une orbite homocline transverse. Ces tores interviennent dans les tentatives de généralisation du mécanisme proposé par V.I. Arnol’d [2] pour l’*instabilité topologique*. De nombreux auteurs (voir [6]) ont conjecturé ce résultat, mais aucune démonstration n’existe à ce jour, mis à part un cas particulier étudié par R.W. Easton [5]. La principale difficulté est liée à l’hyperbolicité *partielle* de ces objets.

La démonstration est basée sur les points suivants :

- sous l’hypothèse d’une torsion non nulle du flot sur le tore, on peut démontrer un énoncé de type λ -lemme [4];
- la *transversalité* des variétés invariantes, couplée à la *torsion* du flot sur le tore, produit de l’« hyperbolicité »;
- la dynamique *minimale* sur le tore *localise* un voisinage de l’orbite homocline où cette hyperbolicité est présente (elle donne l’*alphabet* de la dynamique symbolique).

Les conséquences de ce travail sur le mécanisme d’Arnol’d sont ensuite discutées. Nous démontrons notamment la conjecture de Holmes et Marsden ([6], § 3, p. 672–673) sur l’existence d’orbites périodiques de période arbitrairement longue le long d’une chaîne de transition.

2. Notations et résultat principal

Soient M une variété symplectique de dimension 6 et H un Hamiltonien défini sur M . On note \mathcal{H} la variété d’énergie considérée.

2.1. Tores de Graff

On appelle tore de *Graff* [8], un tore *invariant* de dimension 2, au voisinage duquel le Hamiltonien peut se mettre sous la forme :

$$H(\phi, I, x, y) = \omega \cdot I + \frac{1}{2} I \cdot \Gamma I + \lambda xy + g(\phi, I, x, y),$$

où $(I, \phi, x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, avec \cdot le produit scalaire usuel, Γ une matrice symétrique et g d’ordre 3 en (I, x, y) .

On suppose de plus que ω satisfait une condition diophantienne :

$$|\omega \cdot k| \geq \gamma / |k|^\tau, \tag{1}$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$, $\gamma > 0$ et $\tau > 1$.

Le tore de Graff T est défini par $T = \{(I, \phi, x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid I = x = y = 0\}$. Sa variété stable $W^s(T)$ (resp. instable $W^u(T)$) est définie par $I = y = 0$ (resp. $I = x = 0$).

Comme ω est non résonant, il est possible d'effectuer une surface de section S de dimension 4 au voisinage de T dans laquelle l'application de premier retour a la forme :

$$f(\theta, \rho, s, u) = (\theta + \omega + \nu\rho, \rho, \lambda s, \lambda^{-1}u) + r(\theta, \rho, s, u), \quad (2)$$

où $(\theta, \rho, s, u) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, r d'ordre 2 en ρ, s, u avec $\nu \neq 0$.

2.2. Hypothèses

On note les variables dans l'ordre suivant : $z = (\theta, s, \rho, u)$.

(i) (homocline) Il existe un tore de Graff T dont les variétés stable et instable se coupent transversalement dans \mathcal{H} le long d'au moins une orbite homocline h .

Remarque 1. – Cette hypothèse est générique [7].

L'orbite homocline h coupe la section S en un point $p^- = (\theta^-, 0, 0, u^-)$ de $W^u(T)$ et un point $p^+ = (\theta^+, s^+, 0, 0)$ de $W^s(T)$.

Soit $\mu^+ \in \mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mu^- \in \mathbb{R}_+^*$) un petit paramètre et $\|\cdot\|$ la norme usuelle sur $\mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on défini $B^+ = \{z \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \|z - p^+\| \leq \mu^+\}$ un voisinage de p^+ (de même pour p^-).

On note $D_n = \{z \in B^+ \mid f^n(z) \in B^-\}$ et $D = \bigcup_{n \geq 1} D_n$. On peut choisir μ suffisamment petit pour avoir $D^n \cap D^m = \emptyset$ si $n \neq m$. On note $F : D \mapsto B^-$ l'application *transverse*, définie par $F(z) = f^n(z)$ si $z \in D_n$. Soit $\Lambda : B^- \mapsto B^+$ l'application *homocline*, on note $\Psi : B^+ \mapsto B^+$ l'application définie par $\Psi = \Lambda \circ F$.

L'application Λ a la forme :

$$\Lambda(z) = p^+ + \Pi h + \Lambda_2(h), \quad (3)$$

où $\Pi = D\Lambda(p^-)$ est la différentielle de Λ au point p^- et Λ_2 est un terme d'ordre au moins 2.

(ii) (transversalité) La matrice Π prend la forme suivante dans la base $(e_\theta, e_s, e_\rho, e_u)$:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ \delta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}, \quad (4)$$

avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $ad - bc = 1$, avec $\delta \neq 0$.

Remarque 2. – soit $\Lambda_l(x) = p^+ + \Pi \cdot x$ la partie linéaire de Λ . L'application linéaire tangente est donnée par $(\Lambda_l)_* = \Pi$. On note $w_\xi^\sigma(T) = W^\xi(T) \cap B^\sigma$ pour $\sigma = \pm$ et $\xi \in \{s, u\}$. Pour toute variété Δ , on note $T_y\Delta$ son espace tangent au point y . Si $\delta \neq 0$, on montre facilement que

$$\Pi(T_x w_u^-(T)) + T_{\Lambda_l(x)} w_s^+(T) = T_{\Lambda_l(x)} M, \quad (5)$$

ce qui traduit la transversalité des variétés stable et instable du tore.

- cette hypothèse est vérifiée dans les exemples de type Arnol'd [2].
- on ne connaît pas la forme générique de Π .

(iii) (contrôle des restes) Le reste r de (2) (resp. le reste Λ_2 de (3)) est un $O_2(\rho, su)$.

Remarque 3. – Cette forme du reste est inspirée des résultats de Niederman [8].

2.3. Résultat principal

On définit l'alphabet

$$\mathcal{A} = \left\{ n \in \mathbb{N}, n_0 \leq n \leq \infty \mid |\theta^+ - \theta^- + n\omega| < \frac{\mu^-}{2} \right\},$$

où $n_0 = \gamma / (\frac{\mu^-}{2})^\tau$ par [3].

Remarque 4. – Cet alphabet est non vide car on a la condition diophantienne (1).

Soient $X = (\Theta, S) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$, $Y = (R, U) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\|\cdot\|_1$ la norme sup, et \mathcal{B} la boule de centre 0 et de rayon 1.

Pour $\mu < \mu^-/2$, on définit la *fenêtre* [5] $\mathcal{W} : \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}^+$ par $\mathcal{W}(X, Y) = p^+ + W \cdot (X, Y)$ avec

$$W = \begin{pmatrix} \mu & 0 & \mu\delta^{-1} & 0 \\ 0 & \mu & 0 & b\mu d^{-1} \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}. \quad (6)$$

On note pour $n \in \mathcal{A}$, $\mathcal{H}_n = \{Z = (\Theta, S, R, U) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |U - \lambda^n \mu^{-1} u^-| < \lambda^n, |R| < \lambda^n\}$, et $\mathcal{D} = \bigcup_{n \in \mathcal{A}} \mathcal{H}_n$.

On note aussi $l : \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}$ l'application définie par $l = \mathcal{W}^{-1} \circ \Psi \circ \mathcal{W}$.

THÉORÈME 1. – *Sous (i), (ii) et (iii), pour μ suffisamment petit, l'application l possède un ensemble invariant hyperbolique \mathcal{I} tel que $l|_{\mathcal{I}}$ soit topologiquement conjugué à un décalage sur l'alphabet \mathcal{A} .*

La démonstration est esquissée dans le prochain paragraphe.

Remarque 5. – L'ensemble invariant hyperbolique \mathcal{I} est un Cantor de mesure de Lebesgue nulle.

– Le théorème 1 est encore vrai si le vecteur fréquence sur le tore est seulement non résonant et pour un nombre quelconque de degré de liberté.

– On peut remplacer l'hypothèse ii) en prenant toute matrice Π vérifiant la condition de transversalité (5).

3. Plan de la démonstration

La démonstration s'effectue en trois étapes. On calcule l'application l et on remarque que cette application est *hyperbolique*. L'hyperbolicité provient de la *transversalité* et de la *torsion* non nulle du flot sur le tore. On vérifie ensuite les critères de *chaos* tels qu'ils sont donnés par exemple dans [9] pour la partie affine de l . afin d'utiliser un théorème de stabilité de la dynamique symbolique sous faible perturbation C^1 (voir [5]).

3.1. Calcul de l

Soit $z = (X, Y) \in \mathcal{H}_n$, l'application l s'écrit $l(z) = q + Lz + R(z)$, où $q = (0, \lambda^n s^+ / \mu d, \delta(\theta^+ - \theta^- + n\omega) / \mu, c\lambda^n s^+ / \mu)$,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda^n / d & 0 & \lambda^n b / d^2 \\ \delta & 0 & 2 + \delta n \nu & 0 \\ 0 & c\lambda^n & 0 & cbd^{-1} \lambda^n + d\lambda^{-n} \end{pmatrix},$$

et R est d'ordre 2 en z .

LEMME 1. – La matrice L est hyperbolique si et seulement si $\delta \neq 0$ et $\nu \neq 0$. De plus, ses valeurs propres sont données par

$$\lambda_1 \sim d^{-1}\lambda^n, \quad \lambda_2 \sim 1/\lambda_1, \quad \lambda_3 \sim \delta n\nu, \quad \lambda_4 \sim 1/\lambda_3,$$

pour n assez grand.

Démonstration. – Le polynôme caractéristique de L est $P(x) = (x^2 - x(\delta n\nu + 2) + 1)(x^2 - xa(n) + 1)$, où $a(n) = a\lambda^{2n} + d\lambda^{-n}$.

Le second facteur donne les directions hyperboliques classiques associée aux valeurs propres $d^{-1}\lambda^n$ et $d\lambda^{-n}$ pour n assez grand.

Le premier facteur génère des directions hyperboliques non triviales. On vérifie que les solutions du premier facteur sont données par

$$x_{\pm} = 1 + \frac{\delta n\nu}{2} \pm \frac{1}{2}(\delta^2(n\nu)^2 + 4\delta n\nu)^{1/2}.$$

Si $\delta = 0$ (resp. $\nu = 0$), on a $x_{\pm} = \pm 1$. Supposons donc $\delta \neq 0$ et $\nu \neq 0$, alors pour n assez grand, on a des solutions $x_+ \sim \delta n\nu$ et $x_- \sim 1/\delta n\nu$. \square

Le lemme a illustre le phénomène de transversalité-torsion.

3.2. Critères de Chaos pour $l_a(z) = q + Lz$

C'est une partie essentiellement technique. On suit la démarche de ([9], p. 322) pour démontrer les conditions de cône stable et instable (voir [10]) en utilisant un λ -lemme. Sous l'hypothèse (iii), le tore de Graff est un tore standard suivant [4]. Comme $\nu \neq 0$ le λ -lemme est valide (voir [4]). Les calculs sont alors analogues à [9].

3.3. Contrôle des restes

En utilisant (iii), on démontre que le reste $R(z)$ de $l(z)$ est en λ^{2n} pour chaque point de $z \in \mathcal{H}_n$, $n \in \mathcal{A}$. Or, $\forall z \in \mathcal{H}_n$, les valeurs propres de L sont telles que $\min_i \lambda_i \sim \lambda^n$. Un théorème de stabilité (voir [5]) de la dynamique symbolique sous faible perturbation C^1 termine la démonstration du théorème 1. \square

Remarque 6. – Le phénomène de couplage transversalité-torsion créant l'hyperbolicité est spécifique au cas partiellement hyperbolique. Il n'intervient pas dans la démonstration de l'analogie du théorème de Birkhoff–Smale pour les tores *normalement* hyperboliques (où pourtant, ces deux « ingrédients » sont présents) (voir [9]).

– La forme simple de Π (4) nous permet de mettre en évidence clairement le rôle de la transversalité et de la torsion. Néanmoins, la démonstration du théorème 1 est géométrique via le λ -lemme (voir [4]) et impose seulement la relation de transversalité (5) sur le choix de Π .

4. Quelques conséquences sur le mécanisme d'Arnol'd

Soit que $W^u(T_i)$ coupe transversalement $W^s(T_{i+1})$ dans \mathcal{H} . Ces tores forment une chaîne de transition \mathcal{T} au sens de V.I. Arnol'd (voir [2]).

On suppose de plus que les hypothèses (i), (ii) et (iii) sont vérifiées pour chaque tore de la chaîne.

Soit T_i un tore de la chaîne, on note S_i sa surface de section, h_i une orbite homocline à T , p_i^+ (resp. p_i^-) l'intersection de h_i avec $W^s(T_i) \cap S$ (resp. $W^u(T) \cap S$) et B_i^+ (resp. B_i^-) le voisinage de p_i^+ (resp. p_i^-) défini comme dans 2.2. Pour tout $i = 1, \dots, n$, on note Ψ_i l'application homocline, \mathcal{W}_i la fenêtre, $l_i = \mathcal{W}_i^{-1} \circ \Psi_i \circ \mathcal{W}_i$, ϕ_i l'homéomorphisme du théorème défini au voisinage du tore T_i , \mathcal{A}_i l'alphabet associé et I_i l'ensemble invariant hyperbolique.

On note (n) la séquence infinie $\{\dots, n, n, n, \dots\}$. Soit $p_i(n) = \phi_i^{-1}(n)$, $n \in \mathcal{A}_i$, le point fixe de l_i dans I_i par ϕ_i^{-1} . On a $\Psi_i \circ \mathcal{W}_i(p_i(n)) = \mathcal{W}_i(p(n))$.

On note O_n^i l'orbite périodique de période n pour f associée à $p_i(n)$.

LEMME 2. – Pour tout i , l'orbite périodique O_n^i est hyperbolique et sa variété stable (resp. instable), notée $W^s(O_n^i)$ (resp. $W^u(O_n^i)$), est de dimension 2.

Démonstration. – Cela découle de la structure hyperbolique de I_i . \square

Soit γ_i une orbite hétérocline entre les tores T_i et T_{i+1} et $\Gamma_i : B_i^- \rightarrow B_{i+1}^+$ l'application hétérocline. Soit T un tore de la famille \mathcal{T} . On note $w_i^{\xi, \sigma}(T) = W^\xi(T) \cap B_i^\sigma$ pour $\xi = s, u$, $\sigma = \pm$.

On fait les hypothèses suivantes :

(*) l'orbite γ_i coupe B_i^- (resp. B_{i+1}^+) en un point $q_i^- \in W^u(T_i)$ (resp. $q_i^+ \in W^s(T_{i+1})$);

(**) il existe un difféomorphisme $\mathcal{F}_i^\sigma : w_i^{s, \sigma}(T_{i+1}) \rightarrow w_i^{u, \sigma}(T_i)$, pour $\sigma = \pm$.

Remarque 7. – Les hypothèses (*) et (**) sont vérifiées dans les exemples à l'aide d'un théorème KAM hyperbolique (voir [8]).

THÉORÈME 2. – Sous les hypothèses (*) et (**), il existe une chaîne d'orbites périodiques hyperboliques le long de \mathcal{T} .

Démonstration. – On a $w_i^{u, +}(O_n^i)$ et $w_i^{s, +}(T_i)$ qui se coupent transversalement. Par le λ -lemme (voir [4]), on a donc $w_i^{u, -}(O_n^i)$ aussi proche que l'on veut de $w_i^{u, -}(T_i)$ en topologie C^1 pour n suffisamment grand. Les images de $w_i^{u, -}(O_n^i)$ et $w_i^{u, -}(T_i)$ par Γ_i sont donc aussi proche que l'on veut en topologie C^1 dans B_{i+1}^+ . On a $w_{i+1}^{s, +}(O_n^{i+1})$ aussi proche que l'on veut de $w_{i+1}^{s, +}(T_{i+1})$ en topologie C^1 pour n assez grand. Comme $w_{i+1}^{u, +}(T_i)$ coupe transversalement $w_{i+1}^{s, +}(T_{i+1})$, on en déduit, via (*) et (**), que $w_{i+1}^{s, +}(O_n^{i+1})$ et $w_{i+1}^{u, +}(O_n^i)$ se coupent transversalement. Une récurrence termine la preuve du théorème. \square

On dit qu'il existe des orbites périodiques de période *arbitrairement longue* si, $\forall P \in \mathbb{R}^+$, il existe (au moins) une orbite périodique de période $P > P$.

On déduit du théorème 2, via les théorèmes classiques de dynamique hyperbolique [9,10] :

COROLLAIRE 1. – Il existe des orbites périodiques de période arbitrairement longue le long de \mathcal{T} .

Références bibliographiques

- [1] Alekseev V.M., Quasirandom dynamical systems, Math. USSR. Sbornik. 5 (1968) 73–128.
- [2] Arnol'd V.I., Instability of dynamical systems with many degrees of freedom, Dokl. Akad. Nauk USSR 156 (1964) 9–11.
- [3] Bourgain J., Golse F., Wennberg B., On the distribution of free path lengths for the periodic Lorentz gaz, Commun. Math. Phys. 190 (3) (1997) 491–508.
- [4] Cresson J., Un λ -lemme pour des tores partiellement hyperboliques, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 331 (2000) (à paraître).
- [5] Easton R.W., Homoclinic phenomena in Hamiltonian systems with several degrees of freedom, J. Differ. Eq. 29 (1978) 241–252.
- [6] Holmes P.J., Marsden J.E., Melnikov's method and Arnol'd diffusion for perturbations of integrable Hamiltonian systems, J. Math. Phys. 23 (4) (1982) 669–675.
- [7] Lochak P., Marco J.-P., Sauzin D., On the splitting of invariant manifolds in multidimensional near-integrable Hamiltonian systems, Prépublication 99/220 de l'Inst. Math. Jussieu.
- [8] Niederman L., Dynamics around a chain of simple resonant tori in nearly integrable Hamiltonian systems, Prépublication 97-19 de l'Université Paris-Sud, Mathématiques, Orsay, 1997; J. Differ. Eq. (à paraître).
- [9] Wiggins S., Global Bifurcation and Chaos, Appl. Math. Sci. 73, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [10] Yoccoz J.-C., Introduction to hyperbolic dynamics, in: Real and Complex Dynamical Systems, Branner D., Hjorth P. (Eds.), 1995, pp. 265–291.