

Voyage au coeur des nombres

ou

les nombres réels et la physique

Jacky Cresson

Ce texte est basé sur les travaux que j'ai menés à Besançon avec le physicien Michel Planat du Laboratoire de Physique et Métrologie des oscillateurs. L'aventure commence en 1998. Michel Planat étudie un montage électronique appelé la boucle ouverte. Il a obtenu des diagrammes de fréquences avec une architecture très particulière et fait de nombreuses observations sur la nature des fréquences autorisées, notamment sur leurs développements en fractions continues. C'est à ce moment que nous commençons notre collaboration. Le but est aussi bien de construire une théorie permettant de rendre compte des résultats expérimentaux que d'utiliser les mathématiques existantes pour obtenir le maximum d'informations sur ces fréquences. Les discussions ne sont pas simples. Pour faire une modélisation utile, il faut connaître suffisamment le système électronique et sa manière de sélectionner les fréquences et cet apprentissage demande du temps. Le plus difficile est ensuite de trouver le bon cadre mathématique et de traduire les contraintes physiques dans celui-ci. C'est ce que nous avons fait avec Jean-Nicolas Dénarié [4]. Nous n'avons pas découvert de nouvelles mathématiques comme je l'espérais, mais nous avons un regard nouveau sur de vieux objets et c'est un gain inestimable. Sans la physique, sans les expériences, ce point de vue n'aurait peut-être jamais vu le jour.

1. Introduction

Les nombres réels sont des objets familiers à tout scientifique. Ils ont envahi la plupart des domaines de la science via la modélisation continue des phénomènes. Or, si l'ensemble des nombres réels répond si bien à notre demande c'est qu'il a des propriétés extrêmement particulières.

L'enseignement actuel ne nous pousse pas vraiment à nous interroger sur \mathbf{R} . On rappelle simplement sa notation en début d'un cours en faisant mine que tout le monde sait bien de quoi on parle. Et effectivement, nous savons tous à peu près de quoi il s'agit. Mais si cet ensemble est devenu un ami, cela n'a pas été sans heurt dans l'histoire des sciences. Les grecs par exemple n'auraient jamais défini d'emblée l'ensemble \mathbf{R} . Leur réaction à la mise en évidence de nombres irrationnels en est une illustration. Nous aurions tort de sous estimer l'aversion et la crainte de ces penseurs d'autrefois. Si l'ensemble \mathbf{R} n'a pas tout de suite vu le jour, alors il y a fort à parier que cet objet recelle des difficultés et des pièges d'envergures. Dans cet article, nous allons explorer cet ensemble en le construisant à la main et doucement. Nous serons loin de la présentation habituelle des mathématiciens (avec coupure de Dedekind et complétion), mais nous allons par ce biais récupérer une intuition de cet ensemble et en introduire de nouveaux, beaucoup plus compliqués, mais au combien parlants. L'ensemble des constructions que nous allons faire ne demande pas de connaissances mathématiques autres que celle du lycée.

Notre vision de \mathbf{R} va s'appuyer sur la construction de ce que nous appellerons des *espaces de résolution*. Grossièrement, nous allons simplement construire l'ensemble des nombres qu'il est possible d'atteindre à une résolution donnée. Les ensembles de résolution s'introduisent naturellement en physique car une expérience ou une série de données est toujours obtenue à une précision fixée. Les nombres réels se voient alors comme un ensemble de résolution infini. On comprendra une partie des spécificités de \mathbf{R} en regardant comment les structures des espaces de résolution évoluent lorsque l'on fait tendre la résolution vers l'infini.

Ce renouvellement dans la présentation des nombres réels a été forcé. C'est la physique, précisément l'étude des oscillateurs, qui nous oblige à nous interroger sur la structure de cet ensemble. Ce questionnement n'est pas nouveau, mais les particularités de \mathbf{R} ne se font sentir qu'à des échelles suffisamment petites. Il fallait donc, soit passer par la physique quantique, soit par des expériences avec des degrés de précisions tels que les propriétés fines de \mathbf{R} se fassent sentir.

2. Les nombres réels et le postulat de continuité en physique

Le rapport entre \mathbf{R} et la physique est très intime. Il touche à la modélisation des phénomènes naturels au moyen d'une représentation *continue* des événements. Ce choix est appelé *Postulat de la continuité de la description* ([1],p.46) par Erwin Schrödinger qui le formule comme suit:

"Une description claire et complète de tout événement physique doit nous informer de façon précise de ce qui se passe en chaque point de l'espace à chaque moment du temps."

Cette représentation s'est imposée avec la théorie de la gravitation de Isaac Newton et l'invention du

calcul infinitésimal et du calcul intégral. On peut dire qu'il a dominé et domine encore aujourd'hui une large part de la physique. Cette hégémonie s'explique sans peine par les succès remportés par la mécanique classique, notamment la mécanique céleste et qui ont puissamment marqué les esprits.

En mécanique, \mathbf{R} est l'espace dans lequel varie le temps. L'idée que nous avons est qu'entre deux événements l'objet que l'on suit décrit une trajectoire qui peut se décrire à l'aide d'une courbe paramétrée par un intervalle de \mathbf{R} .

Cette hypothèse (car c'en est une) est-elle raisonnable ? Sans doute en mécanique classique, mais il n'en va pas de même dans d'autres domaines de la physique, notamment en *microphysique*.

Commençons donc par le début, c'est à dire par l'étude typique de données expérimentales et la modélisation qui s'en suit en reprenant d'ailleurs la présentation de Schrödinger [1]. Si une expérience suit l'évolution temporelle d'une particule, nous allons faire au mieux une suite d'observations à des temps t_0, t_1, \dots etc des positions x_0, x_1, \dots etc de la particule. Le postulat de continuité rappelé ci-dessus, a les conséquences suivantes: nous allons relier par une ligne continue la position x_0 à la position x_1 et ainsi de suite. Ce faisant, nous supposons que l'observation faite en t_1 concerne effectivement la particule observée en t_0 . Pourquoi ? Parce que nous pensons qu'une particule doit provenir d'un endroit et aller à un autre. Ce déplacement étant continu, si on observe une particule identique en x_1 pas trop loin de x_0 pour un temps t_1 pas trop loin de t_0 , alors on peut supposer que la particule en x_1 est bien la particule observée en x_0 . Mais il faut bien voir que ce n'est là qu'une hypothèse. En mécanique quantique, il n'est pas du tout évident qu'une particule ait toujours existé et une fois créée existe pour toujours. Il y a des phénomènes de création et d'annihilation. Cette absence de passé ou de futur nous empêche d'appliquer directement le postulat de continuité. On est plus proche d'une suite de données pratiquement indépendantes.

3. Prendre en compte les résolutions

Même en oubliant ces phénomènes de création/annihilation, on peut quand même se demander si nous ne faisons pas une hypothèse trop importante en reliant directement par une courbe continue deux événements successifs.

Nous n'avons accès à la nature que dans la limite d'une *précision* donnée. Par ailleurs, il semble qu'on ne puisse pas atteindre une précision infinie. C'est une conséquence de la relation d'incertitude de Heisenberg: atteindre une résolution infinie en physique demande une énergie infinie. Dans le meilleur des cas, l'*ensemble des nombres accessibles* est soumis à une contrainte de précision (résolution) et c'est cette dernière qu'il faut traduire mathématiquement. La contrainte de précision étant fixée, on peut se poser les questions suivantes: Quelle est la structure de cet ensemble ? Quelles sont ses propriétés ? Jusqu'à quel point diffère-t-il de \mathbf{R} ?

Dans la suite, nous allons explorer une modélisation possible de la contrainte de résolution et répondre à l'ensemble de ces questions. Notre prise en compte des résolutions a été guidée par les expériences sur les oscillateurs menées au Laboratoire de Physique et Métrologie des Oscillateurs de Besançon par Michel Planat [2]. Nous expliciterons ce rapport à l'expérience au paragraphe 6.

4. Premier pas vers les espaces de résolution

Nous allons maintenant formaliser notre problème de résolution. Cette mise en forme du problème n'est pas unique. On peut imaginer tout un panel d'hypothèses pour parler de résolution en physique très différentes de ce que nous allons proposer (les nombres p-adiques par exemple [3]).

Une résolution sera pour nous la donnée d'un nombre entier A que nous ne pouvons pas dépasser. Autrement dit, nous n'avons pas accès aux nombres $x \geq A$. Une manière de le faire est d'identifier tous les nombres réels $x \geq A$ avec l'infini, ce que nous représenterons de la façon suivante:



Figure 1. La contrainte de résolution à l'infini

Nous allons supposer aussi que tous les nombres que nous pouvons construire s'obtiennent en faisant agir sur les entiers $\{0,1,2,\dots,A-1\}$, deux opérations seulement: l'addition $I: x$ donne $x+1$ et la division $J: x$ donne $1/x$. On note R_A l'ensemble ainsi obtenu.

Ce choix peut se justifier de plusieurs façons. Initialement, ce sont les résultats expérimentaux de Michel Planat sur les oscillateurs et la modélisation mathématique de son expérience qui ont suggéré l'utilisation des *fractions continues* [6]. Nous reviendrons sur ce point plus tard. Or, I et J sont les deux opérations entrant dans la décomposition en fractions continues d'un nombre réel.

La construction de R_A est *itérative*. On fait agir successivement la division, l'addition....etc sur les images successives de l'ensemble $E=\{1,2,\dots,A-1\}$. Faisons donc agir la division sur $\{1,2,\dots,A-1\}$. Nous obtenons les fractions $1/(A-1)$,, $1/2$, 1 . De la même manière que A contrôle l'ensemble des nombres réels que nous ne pouvons pas distinguer de l'infini, $1/A$ contrôle les nombres réels que nous ne pouvons pas distinguer de 0. Précisément, pour tout x tel que $0 < x \leq 1/A$, son représentant à la résolution A est 0. La contrainte de résolution crée donc une *zone d'attraction* autour de 0 symbolisée par le dessin suivant:



Figure 2. *Création d'une zone d'attraction au voisinage de 0*

La zône d'attraction autour de 0 va ensuite se transporter autour de tous les entiers $\leq A$ via l'addition. On obtient la figure suivante:

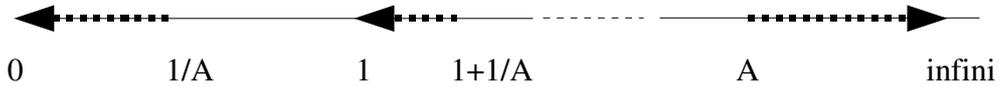


Figure 3. *Création d'une zone d'attraction à droite de 1*

De nouveau, nous allons faire agir la division pour faire apparaître les nombres accessibles. Il y a essentiellement deux phénomènes à percevoir ici:

- Le premier est lié au fait que 1 est stable sous l'action de la division. La zone d'attraction à droite de 1 se transporte donc à gauche et on obtient cette fois tout un voisinage de 1 dans lequel les nombres réels sont approximés à la résolution A par 1.

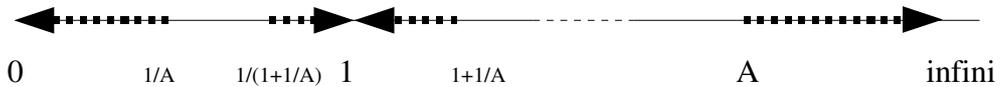


Figure 4. *Création d'un puits d'attraction au voisinage de 1*

On a donc formation d'un puits *d'attraction* autour de 1.

- Le second phénomène tient au transport de la zone d'attraction à gauche de 1 à gauche de A via l'addition x donne $x+(A-1)$. Cette zone se retrouve par division collée sur le bord de la zone d'attraction de 0 et est appelée *zone de transition*.

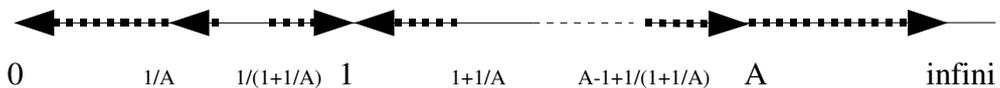


Figure 5. *Création d'une zone de transition au voisinage de 0*

Lorsqu'un nombre est dans cette zone, il va nécessairement transiter vers la zone d'attraction suivante pour atteindre la valeur d'approximation définitive 0 gouvernée par la résolution A.

Expliquons sur un exemple pourquoi cette approximation se fait ici en deux étapes. Le bord de la zone de transition en 0 est donné par

$$1/[A-1+1/(1+1/A)],$$

qui va donc s'identifier par notre contrainte de résolution à

$$1/A,$$

qui lui sera identifié en retour à 0.

Ces deux structures (puits d'attraction et *zones de transition*) vont se retrouver au voisinage des entiers et des rationnels $1/2, \dots, 1/(A-1)$ par l'action de l'addition et de la division. L'architecture de cet ensemble est un peu compliquée. Il a une structure *fractal* et une représentation un peu différente nous le fera voir. Les points importants à garder à l'esprit sont les suivants:

- L'existence d'une résolution finie induit une *dynamique naturelle* des nombres. Cette dynamique est donnée par les zones transitoires.
- Il existe une *hiérarchie* des nombres admissibles: chaque nombre rationnel de R_A possède une zone d'attraction propre qui peut être utilisée pour quantifier son rang.

L'existence d'un seuil de résolution produit donc un monde profondément inégalitaire. Les nombres n'ont pas tous le même pouvoir d'attraction ni la même dynamique.

Pour faire apparaître de manière plus frappante les différentes zones, nous allons tracer le graphe de la fonction d'approximation à la résolution A , c'est à dire la fonction qui à un nombre x donné associe la valeur absolue de la différence $x-x_A$ où x_A est le nombre approximé. Par exemple, tous les nombres $0 < x \leq 1/A$ ont pour approximation 0 et la fonction d'approximation est donc simplement x dans ce cas. On obtient alors une figure de la forme:

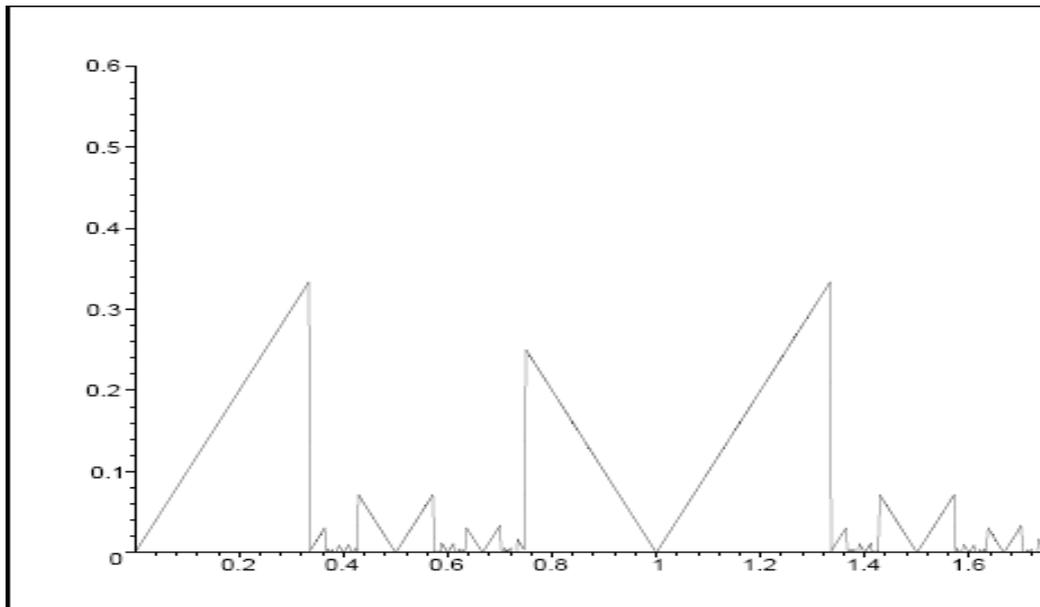


Figure 6. La fonction d'approximation

L'ensemble de résolution R_A s'identifie avec l'ensemble des fractions continues à quotients partiels bornés par A , i.e. l'ensemble des fractions de la forme

$$a_0 + 1/[a_1 + 1/[a_2 + 1/[\dots + 1/[a_n + 1/[\dots] \dots]]] ,$$

avec tous les entiers $a_i \leq A$, les a_i étant en nombre fini ou non. Cet ensemble est bien connu des arithméticiens [6]. Sa présentation est souvent formelle et à la connaissance de l'auteur n'a jamais conduit à la notion de dynamique des nombres que nous avons décrite, ni aux structures de zones d'attraction ou de transition.

5. Travailler avec les ensembles de résolution

Les ensembles de résolution sont donc relativement simples à définir et à analyser en terme de structures. Néanmoins, pour qu'un ensemble soit intéressant et à la base d'une théorie physique, il est souvent nécessaire de pouvoir y faire des calculs, ceci en vue de prédictions par exemple. Or, il est difficile de travailler dans un ensemble de résolution.

Pour prendre un exemple, nous allons considérer le problème suivant: soit p/q et p'/q' deux nombres d'un espace de résolution fixé R_A . Peut-on définir facilement, par une formule explicite ou algorithmique tout au moins, l'approximation à la résolution A du nombre somme ?

Soit $A=3$, on considère $1/2$ et $2/3$ qui appartiennent à l'ensemble de résolution R_3 . Pour $1/2$ c'est évident, pour $2/3$ on remarque que c'est $(1+1/2)^{-1}$. Or, on a $1/2 + 2/3 = 7/6 = 1 + 1/6$ qui appartient à la zone attractive de 1 pour $A=3$. La somme usuelle de deux nombres de R_3 peut donc très bien sortir de R_3 . On doit donc faire une opération non triviale sur la somme pour définir une bonne notion

d'addition sur cet ensemble. Ce genre de problème va se retrouver dans toutes les manipulations que nous allons vouloir faire sur \mathbb{R}_3 . On imagine sans peine les difficultés de modélisation qui en découlent.

6. Une expérience où entre en jeux un phénomène de résolution

On peut penser, malgré les motivations relativement physiques de notre approche, que les ensembles de résolution ne serviront jamais à rien. Rien ne dit en effet, que notre manière de prendre en compte la résolution (ou précision) des expériences soit possible. Or, Michel Planat [2] a justement produit une expérience où notre notion de résolution est exactement celle qu'il faut.

L'expérience consiste à mélanger les fréquences de deux *oscillateurs*. Cette opération se fait en électronique par un composant appelé *boucle ouverte*.

Il est composé d'un *mélangeur* proprement dit, dont le comportement approximatif consiste à prendre deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ et à les multiplier $s_1(t)s_2(t)$. Dans le cas où s_1 est un signal de fréquence f_1 et s_2 un signal de fréquence f_2 donnés par $s_1(t)=a_1 \cos(f_1 t)$ et $s_2(t)=a_2 \cos(f_2 t)$ respectivement, l'opération de multiplication donne

$$s_1(t) s_2(t) = (a_1 a_2 / 2) [\cos((f_1 + f_2)t) + \cos((f_1 - f_2)t)] .$$

On fait donc apparaître la somme et la différence des deux fréquences.

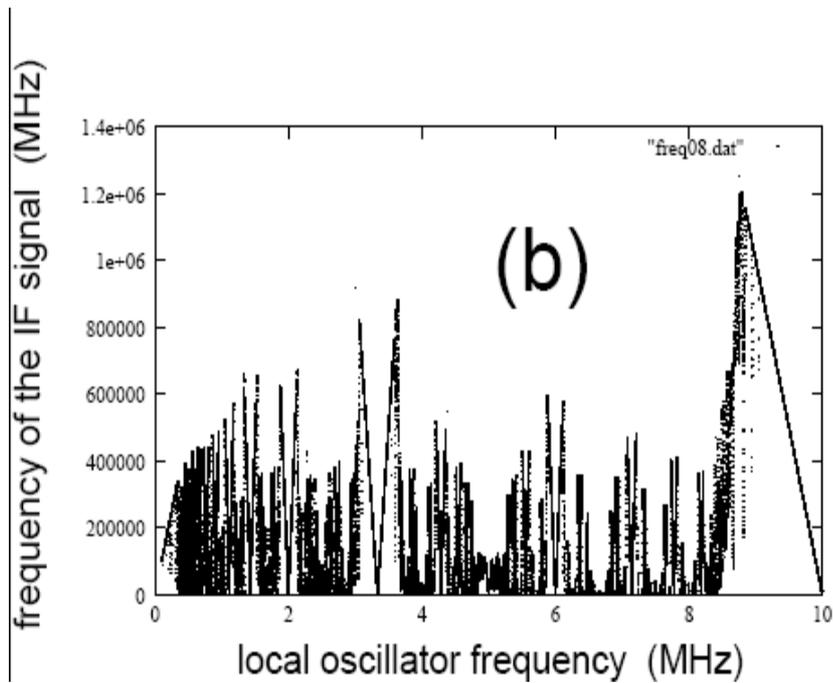
Malheureusement, le mélangeur ne se contente pas de multiplier simplement les deux signaux et une infinité d'harmoniques de la forme

$$C \cos(p f_1 - q f_2) \quad \text{et} \quad C \cos(p f_1 + q f_2)$$

interviennent dans l'expression du signal de sortie.

On peut s'arranger pour ne faire finalement apparaître que les différences de fréquences au moyen d'un composant électronique appelé *filtre passe-bas*. Ce filtre a une fréquence de coupure qui coupe toutes les fréquences du signal au dessus d'un certain seuil f_c .

Le spectre de fréquences que l'on obtient est toujours de la forme suivante:



On note la ressemblance entre la structure du spectre des fréquences et celle d'un ensemble de résolution. Cette similitude n'est pas due au hasard. On peut montrer que le spectre expérimental des fréquences est gouverné par un ensemble de résolution.

Pour le voir, il faut revenir à l'action du filtre passe-bas. Celui-ci laisse passer une fréquence de la forme

$$f_{p,q} = pf_1 - qf_2 ,$$

uniquement si elle vérifie

$$|pf_1 - qf_2| < f_c .$$

Cette relation peut se réécrire comme

$$|p/q - f_2/f_1| < f_c / qf_1 .$$

Le système approxime donc le rapport de fréquence f_2/f_1 par un rationnel p/q .

Sans hypothèse sur la manière dont on va approcher f_2/f_1 on obtient en utilisant cette formule que la fréquence autour du rationnel p/q va être contenue dans un puits symétrique. Or, ce n'est pas ce qui se passe expérimentalement, où on distingue une nette dissymétrie de la zone d'accrochage autour d'un rationnel.

Il y a donc une hypothèse non triviale sur l'approximation des nombres réels par des rationnels. Cette hypothèse se formule comme suit: *le système réalise les meilleures approximations rationnelles des fréquences au sens des fractions continues ([4],[6]).*

On peut montrer que cette hypothèse est équivalente à la suivante ([5]): *Les fréquences admissibles autour d'un rationnel p/q appartiennent à l'ensemble de résolution $f_1 / (f_c q)$.*

Nous ne savons toujours pas aujourd'hui pourquoi la boucle ouverte travaille avec un ensemble de résolution. La difficulté dans l'analyse de ce système tient au fait que l'on ne sait pas modéliser correctement le mélangeur. Il est donc délicat d'écrire une équation, en particulier une équation différentielle régissant le comportement dynamique du système.

Il y a aussi une difficulté plus pernicieuse dans ce type d'expérience: nous n'avons pas un accès direct aux fréquences. La fréquence du signal de sortie est obtenue via un échantillonnage du signal sur une certaine période de temps et un comptage. Rien ne dit que le dispositif chargé de ce traitement ne fait pas lui même apparaître des phénomènes de résolution.

D'autres phénomènes physiques font apparaître des ensembles de résolution, notamment l'*effet Hall quantique* ([7],[8]).

7. Et les nombres réels dans tout ça ?

Retournons à notre objet d'étude initial, c'est à dire **R**. Étudier **R** c'est savoir ce qui se passe lorsque la résolution tend vers l'infini. Ce passage a les conséquences suivantes:

- Disparition de la dynamique des nombres;
- Disparition du phénomène de hiérarchie.

Autrement dit, passer dans le domaine des nombres réels, c'est travailler dans un monde statique et amorphe. On est loin de la joyeuse structure fractal des nombres résolus et de leur dynamique. Mais cette amorphie de **R** permet du coup de définir facilement toute une série d'opérations pour lui conférer le statut de corps. Or, comme nous l'avons vu, c'est loin d'être aussi simple dans le cas d'un ensemble de résolution. Si nous partons du principe qu'un des buts d'une théorie physique est de permettre des *prédictions*, alors convenons qu'une théorie construite sur **R** a beaucoup plus de chances de conduire à des résultats qu'une théorie basée sur un ensemble de résolution. C'est de la *complexité* des calculs dont il est question ici et **R** n'a pas son pareil pour supprimer les difficultés dues à la prise en compte des résolutions.

Cette facilité de manipulation sur **R** se paye au niveau de son étude. On a grossi considérablement les espaces de résolution en comblant les zones attractives et de transit. Ce faisant on récupère un monde infini de nombres qu'il est bien difficile d'appréhender autrement que de manière abstraite.

Octobre 2006

Références

- [1] Schrödinger E., *Physique quantique et représentation du monde*, Editions du Seuil, Collection Sciences, 1992.
- [2] Planat M., $1/f$ frequency noise in a communication receiver and the Riemann hypothesis, dans *Noise, oscillators and algebraic randomness*, Planat ed., Lect. Notes in Physics, 2000.
- [3] Barsky D., Christol G., Ces curieux nombres P-adiques, La Recherche Hors série no.2, *L'univers des nombres*, 1999, p.53.
- [4] Cresson J., Dénarié J-N., Geometry and dynamics of numbers under finite resolution, dans *Noise, oscillators and algebraic randomness*, Planat ed., Lect. Notes in Physics, 305-323, 2000.
- [5] Cresson J., Dynamique des nombres et physique des oscillateurs, arXiv:math-ph/0509053, 21.p, 2005.
- [6] Khintchine A.Y., *Continued fractions*, P. Noordhoff Ltd, Groningen, 1963.
- [7] Georgelin Y., Masson T., Wallet J-C., Visibility diagrams and experimental stripe structures in the quantum Hall effect, *J. Phys. A: Math. Gen.* 33 (2000) 8649-8662.
- [8] Georgelin Y., Masson T., Wallet J-C., Modular group, visibility diagram and quantum Hall effect, *J. Phys. A: Math. Gen.* 30 (1997), 5065-5075.