Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 333–336
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Probabilités/Systèmes dynamiques

Plongement stochastique des systèmes lagrangiens

Jacky Cresson, Sébastien Darses

Laboratoire de mathématiques, université de Franche-Comté, 16, route de Gray, 25030 Besançon, France

Reçu le 2 novembre 2005 ; accepté le 19 décembre 2005

Disponible sur Internet le 18 janvier 2006

Présenté par Paul Malliavin

Résumé

On définit un opérateur agissant sur des processus stochastiques, qui étend la dérivation classique sur les fonctions déterministes différentiables. On utilise cet opérateur pour définir une procédure associant aux opérateurs différentiels et équations différentielles ordinaires leurs analogues stochastiques. Elle est appelée plongement stochastique. En plongeant les systèmes lagrangiens, nous obtenons une équation d'Euler–Lagrange stochastique, qui dans le cas des systèmes lagrangiens naturels est appelée équation de Newton plongée. Cette dernière contient l'équation de Newton stochastique introduite par Nelson dans sa théorie dynamique des diffusions browniennes. Enfin, on considère une diffusion à drift gradient, à coefficient de diffusion constant et possédant une densité de probabilité. On démontre alors qu'une condition nécessaire pour que cette diffusion soit solution de l'équation de Newton plongée, est que sa densité soit le carré du module d'une fonction d'onde solution d'une équation de Schrödinger linéaire. ***Pour citer cet article : J. Cresson, S. Darses, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

Stochastic embedding of Lagrangian systems. We define an operator which extends classical differentiation from smooth deterministic functions to certain stochastic processes. Based on this operator, we define a procedure which associates a stochastic analog to standard differential operators and ordinary differential equations. We call this procedure stochastic embedding. By embedding Lagrangian systems, we obtain a stochastic Euler–Lagrange equation which, in the case of natural Lagrangian systems, is called the embedded Newton equation. This equation contains the stochastic Newton equation introduced by Nelson in his dynamical theory of Brownian diffusions. Finally, we consider a diffusion with a gradient drift, a constant diffusion coefficient and having a probability density function. We prove that a necessary condition for this diffusion to solve the embedded Newton equation is that its density be the square of the modulus of a wave function solution of a linear Schrödinger equation. ***To cite this article: J. Cresson, S. Darses, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

1. Dérivée stochastique dynamique

On note $I :=]a, b[$ où $a < b$ et $J := [a, b]$ l'adhérence de I dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathbb{K}$ un corps et $d \in \mathbb{N}^*$. On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sur lequel existent une famille croissante de tribus $(\mathcal{P}_t)_{t\in J}$ et une famille décroissante de tribus $(\mathcal{F}_t)_{t\in J}$. Suivant Yasue [6], on introduit la

Adresses e-mail : cresson@math.univ-fcomte.fr (J. Cresson), darses@math.univ-fcomte.fr (S. Darses).

1631-073X/$ – see front matter © 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2005.12.028

Définition 1.1. On note $\mathcal{C}^1_{\mathbb{K}}(J)$ l'ensemble des processus X définis sur $J \times \Omega$, à valeurs dans $\mathbb{K}^d$ et tels que : X soit $(\mathcal{P}_t)$ et $(\mathcal{F}_t)$ adapté, pour tout $t \in J$ $X_t \in L^2(\Omega)$, l'application $t \to X_t$ de J dans $L^2(\Omega)$ est continue, pour tout $t \in I$ les quantités

$$DX_t = \lim_{h\to 0^+} h^{-1}E[X_{t+h} - X_t \mid \mathcal{P}_t], \quad \text{et} \quad D_*X_t = \lim_{h\to 0^+} h^{-1}E[X_t - X_{t-h} \mid \mathcal{F}_t],$$

existent dans $L^2(\Omega)$, et enfin les applications $t \to DX_t$ et $t \to D_*X_t$ sont continues de I dans $L^2(\Omega)$.

Le complété de $\mathcal{C}^1_{\mathbb{K}}(J)$ pour la norme

$$\|X\| = \sup_{t\in I}\big(\|X_t\|_{L^2(\Omega)} + \|DX_t\|_{L^2(\Omega)} + \big\|D_*X(t)\big\|_{L^2(\Omega)}\big),$$

est encore noté $\mathcal{C}^1_{\mathbb{K}}(J)$, et simplement $\mathcal{C}^1(J)$ quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Les quantités D et D_* sont introduites par Edward Nelson dans sa théorie dynamique des diffusions browniennes (cf. [4]). Soit ι l'injection

$$\iota : \begin{cases} C^1(J) \longrightarrow \mathcal{C}^1(J), \\ f \longmapsto \iota(f) : (\omega, t) \mapsto f(t). \end{cases}$$

On note : $\mathcal{P}^k_{\det} := \iota(C^k(J))$. Le problème d'extension consiste à trouver un opérateur $\mathcal{D} : \mathcal{C}^1(I) \to \mathcal{C}^1_{\mathbb{C}}(I)$ satisfaisant :

(i) (Recollement) $\mathcal{D}\iota(f)_t = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)$ sur Ω,
(ii) ($\mathbb{R}$-linéarité) $\mathcal{D}$ est $\mathbb{R}$-linéaire,
(iii) (Reconstruction) Si l'on note $\mathcal{D}X = A(DX, D_*X) + \mathrm{i}B(DX, D_*X)$, où A et B sont des $\mathbb{R}$-formes linéraires, on suppose que l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (A(x, y), B(x, y))$ est inversible.
(iv) Si $D_* = -D$ alors $A(DX, D_*X) = 0$ et $B(DX, D_*X) = D$.

L'opérateur $\mathcal{D}$ étend donc la dérivation classique (cf. (i)) en un opérateur linéaire (cf. (ii)) sur $\mathcal{C}^1(J)$ et la connaissance de $\mathcal{D}X$ induit celle de DX et D_*X (cf. (iii)). On obtient :

Lemme 1.2. *Les seuls opérateurs* $\mathcal{C}^1(I) \to \mathcal{C}^1_{\mathbb{C}}(I)$ *vérifiant* (i), (ii), (iii) *et* (iv) *sont* :

$$\mathcal{D}_\mu = \frac{D + D_*}{2} + \mathrm{i}\mu\frac{D - D_*}{2}, \quad \mu = \pm 1.$$

On écrira $\mathcal{D} := \mathcal{D}_1$ et $\overline{\mathcal{D}} := \mathcal{D}_{-1}$. La définition des itérés de $\mathcal{D}$ et $\overline{\mathcal{D}}$ nécessite l'extension de ces opérateurs aux processus à valeur complexe. Dans la suite, on étend $\mathcal{D}$ et $\overline{\mathcal{D}}$ par $\mathbb{C}$-linéarité aux processus complexes, i.e. pour tous $X, Y \in \mathcal{C}^1(J)$, $\mathcal{D}(X + \mathrm{i}Y) = \mathcal{D}X + \mathrm{i}\mathcal{D}Y$. On note $\mathcal{C}^n(J)$ l'ensemble des processus $X \in \mathcal{C}^1(J)$ tels que pour tout $p \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathcal{D}^p X_t$ existe en tout point de I. La proposition (4.1) p. 238 dans [5] et sa démonstration montre que $\mathcal{C}^1(J)$ n'est pas trivial car il contient une large classe de diffusions. On a donc $\mathcal{P}^1_{\det} \subsetneq \mathcal{C}^1(J)$.

Le calcul de $\mathcal{D}^p$ combine de façon non triviale les quantités D et D_*. À titre d'exemple, on obtient sur $\mathcal{C}^2(J)$, $\mathcal{D}^2 = \frac{DD_*+D_*D}{2} + \mathrm{i}\frac{D^2-D_*^2}{2}$. La partie réelle de $\mathcal{D}^2$ coïncide donc avec l'accélération postulée par Nelson comme quantité la plus pertinente pour décrire une notion d'accélération pour une diffusion brownienne (cf. [4] p. 82).

2. Procédure de plongement stochastique

En utilisant $\mathcal{D}$, on construit des analogues stochastiques d'opérateurs différentiels non linéaires.

Définition 2.1 (*Plongement stochastique*). On appelle plongement stochastique, relatif à l'extension $\mathcal{D}_\mu$, d'un opérateur O qui sécrit sous la forme :

$$O = a_0(\cdot, t) + a_1(\cdot, t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \cdots + a_n(\cdot, t)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}$$

avec $a_i \in C^1(\mathbb{R}^d \times J)$, $n \in \mathbb{N}^*$, l'opérateur

$$\mathcal{O} = a_0(\cdot, t) + a_1(\cdot, t)\mathcal{D}_\mu + \cdots + a_n(\cdot, t)\mathcal{D}_\mu^n$$

agissant sur $\mathcal{C}^n(J)$.

Un opérateur O écrit sous la forme : $O = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \circ a(\cdot, t)$, $a \in C^1(\mathbb{R}^d \times J)$, est plongé en $\mathcal{O} = \mathcal{D}_\mu \circ a(\cdot, t)$ agissant sur un sous-ensemble de $\mathcal{C}^1(J)$ dépendant de certaines propriétés de a.

Un opérateur de la forme $O = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \circ a(\cdot, t)$ peut se réécrire $\partial_x a(\cdot, t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ qui se plonge alors en $\partial_x a(\cdot, t)\mathcal{D}$. Ce dernier n'est égal à $\mathcal{O} = \mathcal{D}_\mu \circ a(\cdot, t)$ que dans certains cas (cf. [2] p. 52). Ceci montre en particulier que le plongement stochastique n'est pas une application, il dépend du choix d'écriture de l'opérateur.

La notion de plongement d'opérateur s'étend de façon naturelle à celle de plongement d'équation définie par un opérateur O d'ordre n : $O \cdot (x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d}t^k}) = 0$. On définit l'équation plongée par : $\mathcal{O} \cdot (X, \mathcal{D}_\mu X, \ldots, \mathcal{D}_\mu^k X) = 0$ où $X \in \mathcal{C}^{n+k}(J)$. On s'occupe désormais du cas lagrangien.

Définition 2.2. On appelle lagrangien admissible une fonction $L : \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ de classe C^1 en sa première variable x et holomorphe en sa deuxième variable y, et réelle quand y est réelle. L'équation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\partial_y L\left(x(t), \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right) = \partial_x L\left(x(t), \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right) \tag{1}$$

s'appelle équation d'Euler–Lagrange.

Lemme 2.3. *Soit L un lagrangien admissible. Le plongement stochastique de* (1) *est donné par*

$$\mathcal{D}\partial_y L(X_t, \mathcal{D}X_t) = \partial_x L(X_t, \mathcal{D}X_t). \tag{2}$$

On sait que l'Éq. (1) provient d'un principe de moindre action (cf. [1] p. 84). Existe-il un principe de moindre action stochastique permettant l'obtention de l'Éq. (2) ? Nous montrons dans [2] Chapitre 7 que tel est bien le cas et on donne un lemme montrant la cohérence de la procédure de plongement vis-à-vis des principes de moindre action ainsi définis.

3. Équation de Newton plongée et équation de Schrödinger

Considérons le lagrangien admissible $L(x, z) = \frac{1}{2}(z_1^2 + \cdots + z_d^2) - U(x)$ où $(x, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^d$ et U est une fonction de classe C^1. L'Éq. (1) associée est l'équation de Newton $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\nabla U(x(t))$. L'équation de Newton plongée est alors

$$\mathcal{D}^2 X_t = -\nabla U(X_t) \tag{3}$$

et coïncide avec l'équation d'Euler–Lagrange plongée (2). On se propose d'étudier un résultat sur la densité d'un processus solution de cette équation.

On donne dans [2] p. 24, suivant [3] et [5], un espace sur lequel nous pourrons calculer les dérivées du premier ordre D et D_* et les dérivées du second ordre D^2, DD_*, D_*D et D_*^2. Prenons $I =]0, 1[$. Soit $(W_t)_{t\in J}$ un mouvement brownien standard dans $\mathbb{R}^d$ défini sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{P}_t)_{t\in J}, P)$.

Définition 3.1. On désigne par Λ l'espace des diffusions X satisfaisant les conditions suivantes :

(i) X est solution sur J de l'EDS :

$$\mathrm{d}X_t = b(t, X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\,\mathrm{d}W_t, \quad X_0 = X^0 \quad \text{où } X^0 \in L^2(\Omega),$$
$$b : J \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \quad \text{et} \quad \sigma : J \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$$

sont des fonctions mesurables vérifiant l'hypothèse : il existe une constante K telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$:

$$\sup_t\left(\left|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\right| + \left|b(t, x) - b(t, y)\right|\right) \leqslant K|x - y| \quad \text{et} \quad \sup_t\left(\left|\sigma(t, x)\right| + \left|b(t, x)\right|\right) \leqslant K\left(1 + |x|\right),$$

(ii) pour tout $t \in J$, X_t possède une densité $p_t(x)$ en $x \in \mathbb{R}^d$,

(iii) en posant $a_{ij} = (\sigma\sigma^*)_{ij}$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, pour tout $t_0 > 0$, pour tout ouvert borné $\Xi \subset \mathbb{R}^d$, $\int_{t_0}^1 \int_\Xi |\partial_j(a_{ij}(t,x)p_t(x))| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t < +\infty$,

(iv) les fonctions b et $(t,x) \to \frac{1}{p_t(x)}\partial_j(a_{kj}(t,x)p_t(x))$ appartiennent à $C^1(I \times \mathbb{R}^d)$, sont bornées et toutes leurs dérivées du premier et second ordre sont bornées.

On notera Λ_σ (resp. Λ^g) le sous-ensemble de Λ formé par les diffusions dont le coefficient est constant égal à σ (resp. dont le drift est un gradient), et on pose $\Lambda_\sigma^g := \Lambda_\sigma \cap \Lambda^g$.

Théorème 3.2. *Soit $X \in \Lambda$ et $f \in C^{1,2}(I \times \mathbb{R}^d)$ telle que $\partial_t f$, ∇f et $\partial_{ij} f$ sont bornées. On obtient, en adoptant la convention d'Einstein sur la sommation des indices*

$$(\mathcal{D}X_t)_k = \left(b - \frac{1}{2p_t}\partial_j\big(a^{kj}p_t\big) + \frac{\mathrm{i}}{2p_t}\partial_j\big(a^{kj}p_t\big)\right)(t, X_t), \tag{4}$$

$$\mathcal{D}f(t, X_t) = \left(\partial_t f + \mathcal{D}X_t \cdot \nabla f + \frac{\mathrm{i}}{2}a^{kj}\partial_{kj} f\right)(t, X_t). \tag{5}$$

On pose : $\mathcal{S} = \{X \in \Lambda_d \mid \mathcal{D}^2 X_t = -\nabla U(X(t))\}$, et pour $X \in \Lambda$ dont le drift est b et la fonction de densité $p_t(x)$, $\Theta_X = (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d) \setminus \{(t,x) \mid p_t(x) = 0\}$.

Si $X \in \Lambda_\sigma^g$ alors il existe des fonctions R et S différentiables sur Θ_X telles que $\mathcal{D}X_t = (\nabla S + \mathrm{i}\nabla R)(X_t)$ car $\mathcal{D}X_t = (b - \frac{\sigma^2}{2}\nabla\log(p_t) + \mathrm{i}\frac{\sigma^2}{2}\nabla\log(p_t))(X_t)$ et b est un gradient. On choisit $R(t,x) = \frac{\sigma^2}{2}\nabla\log(p_t(x))$. Les fonctions R et S sont également introduites par Nelson dans [4] p. 107.

On pose $A = S - \mathrm{i}R$ et $\Psi_X(t,x) = \mathrm{e}^{A(t,x)/\sigma^2}$.

Théorème 3.3. *Si $X \in \mathcal{S} \cap \Lambda_\sigma^g$, alors $p_t(x) = |\Psi_X(t,x)|^2$ et Ψ satisfait sur Θ_X l'équation de Schrödinger linéaire* : $\mathrm{i}\sigma^2\partial_t\Psi + \frac{\sigma^4}{2}\Delta\Psi = U\Psi$.

Démonstration. Des expressions $\Psi_X(t,x) = \mathrm{e}^{A(t,x)/\sigma^2}$ et $R(t,x) = \frac{\sigma^2}{2}\nabla\log(p_t(x))$, on déduit $|\Psi_X(t,x)|^2 = p_t(x)$. L'équation de Newton plongée peut s'écrire $\overline{\mathcal{D}}^2 X_t = -\nabla U(X_t)$ car U est réel.

Or $\overline{\mathcal{D}}X_t = \nabla A(t, X_t) = -\mathrm{i}\sigma^2\frac{\nabla\Psi}{\Psi}(t, X_t)$. Donc $-\mathrm{i}\sigma^2\overline{\mathcal{D}}\frac{\nabla\Psi}{\Psi}(t, X_t) = -\nabla U(X_t)$ et avec (5) il vient $\mathrm{i}\sigma^2(\partial_t\frac{\partial_k\Psi}{\Psi} + \overline{\mathcal{D}}X(t)\cdot\nabla\frac{\partial_k\Psi}{\Psi} - \mathrm{i}\frac{\sigma^2}{2}\Delta\frac{\partial_k\Psi}{\Psi})(t, X_t) = \partial_k U(X_t)$. Le lemme de Schwarz donne :

$$\overline{\mathcal{D}}X(t)\cdot\nabla\frac{\partial_k\Psi}{\Psi} = -\frac{\mathrm{i}\sigma^2}{2}\partial_k\sum_{j=1}^d\left(\frac{\partial_j\Psi}{\Psi}\right)^2, \quad \text{et} \quad \Delta\frac{\partial_k\Psi}{\Psi} = \partial_k\sum_{j=1}^d\left[\frac{\partial_j^2\Psi}{\Psi} - \left(\frac{\partial_j\Psi}{\Psi}\right)^2\right],$$

et par conséquent : $\mathrm{i}\sigma^2\partial_k(\frac{\partial_t\Psi}{\Psi} - \mathrm{i}\frac{\sigma^2}{2}\frac{\Delta\Psi}{\Psi})(t, X_t) = \partial_k U(X_t)$. En intégrant sur Θ_X les fonctions des deux membres de la dernière équation, il apparaît des constantes qu'on peut rendre nulles en ajoutant une fonction de t convenable dans S. Le résultat s'en déduit. □

La partie réelle de l'équation de Newton plongée coïncide avec l'équation de Newton stochastique proposée par Nelson dans sa théorie dynamique des diffusions browniennes ([4] p. 83). Sa partie imaginaire correspond à l'équation $(D^2 - D_*^2)X = 0$. Nous conjecturons que cette dernière impose que le drift de X doit être un gradient, et donc qu'il n'est pas utile de le supposer dans le Théorème 3.3.

Références

[1] V.I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, second ed., Springer, 1989.

[2] J. Cresson, S. Darses, Stochastic embedding of dynamical systems, arXiv: math.PR/0509713, 2005, p. 112.

[3] A. Millet, D. Nualart, M. Sanz, Integration by parts and time reversal for diffusion processes, Ann. Probab. 17 (1) (1989) 208–238.

[4] E. Nelson, Dynamical Theories of Brownian Motion, second ed., Princeton University Press, Princeton, 2001.

[5] M. Thieullen, Second order stochastic differential equations and non-Gaussian reciprocal diffusions, Probab. Theory Related Fields 97 (1993) 231–257.

[6] K. Yasue, Stochastic calculus of variations, J. Funct. Anal. 41 (1981) 327–340.